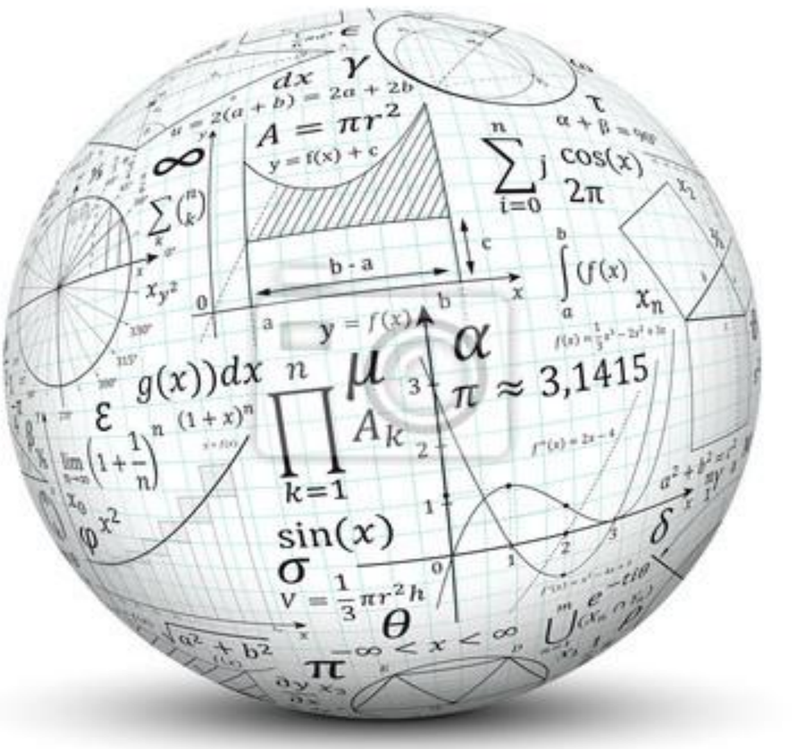
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ – ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ



2255 Ασκήσεις

Θεωρία με την μορφή Ερωταπαντήσεων

Βασικά Αντιπαραδείγματα

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Νίκος Κ. Ράπτης

Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Ι

1. Τι λέμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A **(2018 Ε−2019)**

Έστω A υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A λέγεται μια διαδικασία f, με την οποία κάθε στοιχείο x του A αντιστοιχίζεται σε ένα και μοναδικό πραγματικό αριθμό y ενός συνόλου B που ονομάζεται σύνολο τιμών.

2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες **(2007−2012 Ε−2016)**

Δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες όταν :
έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$

3. Τι λέμε σύνθεση της συνάρτησης f με την συνάρτηση g

Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τα A, B αντίστοιχα τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g και την συμβολίζουμε με gof την συνάρτηση με τύπο $(gof)(x) = g(f(x))$
και πεδίο ορισμού $Agof = \{x \in A \ / \ f(x) \in B\}$

4. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ

Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της,
όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1) < f(x_2)$

5. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ

Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της,
όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1) > f(x_2)$

6. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 ολικό μέγιστο
(2010 Ε−2014)

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 ολικό μέγιστο το $f(x_0)$
όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

7. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο το $f(x_0)$
όταν $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

8. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι είναι 1-1 **(2005 Ε−2015 Ε)**

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή :
Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

9. Πότε μια συνάρτηση f αντιστρέφεται και πως **(2019)**

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται , αν και μόνο αν είναι 1-1 .
Η αντίστροφη συνάρτηση της f συμβολίζεται με f^{-1} , έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f και ορίζεται από την σχέση $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

10. Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής **(2016 Ε)**

Έστω οι συναρτήσεις f , g , h . Αν : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ κοντά στο x_0 , και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

11. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 **(2009 Ε−2015)**

Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

12. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α , β] **(2004 Ε−2008−2012-2017)**

Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α , β] , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α , β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$

13. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano **(2014 Ε)**

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α , β]. Αν η f είναι συνεχής στο [α , β] και επιπλέον $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα , τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$
Γεωμετρική Ερμηνεία : Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$

14. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών

Έστω μια συνάρτηση f ,ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α , β]. Αν η f είναι συνεχής στο [α , β] και επιπλέον $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένα , τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

15. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μεγίστης και Ελαχίστης Τιμής

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει:
$m \le f(x) \le M, \forall x \in [\alpha,\beta]$

16. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της **(2004−2009)**

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

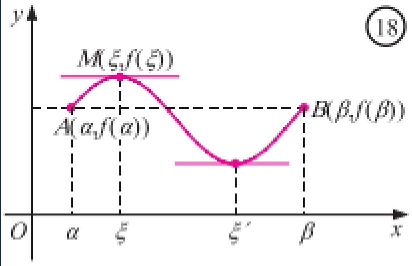
17. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ **(2010 Ε−2013)**

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to \alpha^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to \beta^-}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in \mathbb{R}$

18. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle **(2012 Ε)**

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρική Ερμηνεία:

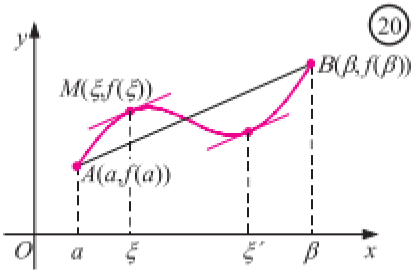


Υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα x'x
(2007 Ε)

19. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής **(2013−2016)**

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β), τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Γεωμετρική Ερμηνεία:



Υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB όπου $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$. **(2003−2008 Ε−2016 Ε)**

20. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο **(2012)**

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta , x_0 + \delta)$.
Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου , ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f .

21. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο **(2015)**

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο , όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta , x_0 + \delta)$.
Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου , ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f .

22. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat **(2013 Ε)**

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό , τότε $f'(x_0)=0$

23. Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ **(2013 Ε)**

Κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι ίση με το μηδέν.

24. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή σε ένα διάστημα Δ **(2006)**

Η συνάρτηση f λέγεται κυρτή ή ότι στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σ' ένα διάστημα Δ όταν είναι συνεχής στο Δ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

25. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κοίλη σε ένα διάστημα Δ **(2010−2014)**

Η συνάρτηση f λέγεται κοίλη ή ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω σ' ένα διάστημα Δ όταν είναι συνεχής στο Δ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

26. Πότε το σημείο $A(x_0 , f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f

Το σημείο $A(x_0 , f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f όταν η f είναι κυρτή στο (α , x_0) και κοίλη στο (x_0 , β) ή αντιστρόφως και η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0 , f(x_0))$

27. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f **(2010−2015 Ε)**

Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ ή $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

28. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντ. στο $-\infty$) **(2007−2016 Ε)**

Η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) όταν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ στο $-\infty$)

29. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντ. στο $-\infty$) **(2005−2011)**

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) αν $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$ (αντιστοίχως αν $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$).

30. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ **(2006 Ε−2011Ε−2014 Ε)**

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f σε ένα διάστημα Δ, ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\Delta$

31. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού **(2018)**

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

1. Αν P(x) πολυώνυμο, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Έχουμε :

$\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim\limits_{x\to x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim\limits_{x\to x_0} (\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}) + \cdots + \lim\limits_{x\to x_0} \alpha_0 =$

$= \alpha_\nu \lim\limits_{x\to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1} \lim\limits_{x\to x_0} x^{\nu-1} + \cdots + \lim\limits_{x\to x_0} \alpha_0 = \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0)$

2. Απόδειξη Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών **(2005−2015)**

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα υπάρχει αριθμός η τέτοιος ώστε $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$.
Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, με $x \in [\alpha, \beta]$. Παρατηρούμε ότι :
η g είναι συνεχής στο $[\alpha , \beta]$ αφού η f είναι συνεχής
$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ αφού $f(\alpha) < \eta$
$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$ αφού $f(\beta) > \eta$
άρα $g(\alpha)g(\beta) < 0$.
Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha , \beta)$
τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - \eta = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \eta$

3. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο x_0 , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι και συνεχής στο σημείο αυτό **(2003−2007 Ε −2013 Ε−2018)**

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.

Για $x \neq x_0$ έχουμε : $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$ οπότε

$\lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0}(x - x_0) =$

$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
Άρα δείξαμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

4. Αν $f(x) = c$ να αποδείξετε ότι $f'(x)=0$

Για $x \neq x_0$ έχουμε : $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$.

5. Αν $f(x) = x$ να αποδείξετε ότι $f'(x)= 1$

Για $x \neq x_0$ έχουμε : $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$

6. Αν $f(x) = x^{\nu}$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$

Για $x \neq x_0$ έχουμε :

$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0} =$

$= \lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}) = x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots x_0^{\nu-1} = \nu\, x_0^{\nu-1}$. Άρα $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$.

7. Αν $f(x) = \sqrt{x}$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$ **(2005 Ε−2009 Ε)**

Για $x \neq x_0$ έχουμε : $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} =$

$= \lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x_0})^2}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Άρα $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

8. Αν $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$

Πράγματι : $f'(x) = (x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{(1)'x^{\nu}-1\,(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \frac{-\nu\, x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu\, x^{-\nu-1}$

9. Αν $f(x) = \varepsilon\varphi x$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$f'(x) = (\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\,\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

10. Αν $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $x > 0$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Πράγματι αν , $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε : $y = e^{u}$.
Επομένως $y' = (e^{u})' = e^{u}\cdot u' = e^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)' = e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$

11. Αν $f(x) = \alpha^{x}$, $\alpha > 0$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \alpha^{x}\ln\alpha$

Πράγματι αν , $y = \alpha^{x} = e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u = x\ln\alpha$, τότε έχουμε : $y = e^{u}$.
Επομένως $y' = (e^{u})' = e^{u}\cdot u' = e^{x\ln\alpha}\cdot(x\ln\alpha)' = e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha = \alpha^{x}\ln\alpha$.

12. Αν $f(x)=\ln|x|$, $x\neq 0$ να αποδείξετε ότι $f'(x)=\frac{1}{x}$ (2008)

- Αν $x>0$ τότε $f(x)=\ln|x|=\ln x$, άρα $f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$
- Αν $x<0$ τότε $f(x)=\ln|x|=\ln(-x)$ οπότε θέτουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$ έχουμε $y=\ln u$.

Επομένως: $y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$.

Άρα σε κάθε περίπτωση $f'(x)=\frac{1}{x}$

13. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν f συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. (2004 Ε–2009–2014)

Για να είναι f σταθερή στο Δ , αρκεί να δείξουμε ότι $\forall\, x_1, x_2\in\Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.

– Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$

– Αν $x_1<x_2$ τότε αφού f συνεχής στο $[x_1,x_2]$, f παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) , τότε η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής , άρα θα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Επειδή το ξ εσωτερικό σημείο του Δ τότε:

$f'(\xi)=0\Leftrightarrow\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0\Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_2)=f(x_1)$

– Αν $x_1>x_2$ τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $f(x_1)=f(x_2)$, οπότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ.

14. Έστω δύο συναρτήσεις f , g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν f , g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια , ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)=g(x)+c$.

– Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

– Για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει : $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$

Άρα η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή , οπότε υπάρχει σταθερά c ώστε :

$f(x)-g(x)=c\Leftrightarrow f(x)=g(x)+c$.

15. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν f συνεχής στο Δ και $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ. (2006 –2012 –2017–2019)

Για να είναι f γνησίως αύξουσα στο Δ , αρκεί να δείξουμε ότι $\forall\, x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$

– Αφού f συνεχής στο $[x_1,x_2]$, f παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) , τότε η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής , άρα θα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\,f'(\xi)$

– Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$ θα είναι και $f(x_2)-f(x_1)>0\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

16. Απόδειξη Θεωρήματος Fermat (2004 – 2011 – 2016 Ε – 2017Ε)

– Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σε αυτό τοπικό μέγιστο , υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$
και $f(x) \leq f(x_0)$ (1) για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

– Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , άρα : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Επομένως :

– αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ τότε $x < x_0 \Leftrightarrow x - x_0 < 0$ και λόγω της (1) θα είναι $f(x) - f(x_0) \leq 0$

άρα $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ οπότε θα έχουμε $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ (2)

– αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ τότε $x > x_0 \Leftrightarrow x - x_0 > 0$ και λόγω της (1) θα είναι $f(x) - f(x_0) \leq 0$

άρα $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ οπότε θα έχουμε $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ (3)

Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

17. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α , β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f (2012 Ε–2016)

– Αφού f συνεχής στο x_0 και $f'(x)>0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$
Έτσι έχουμε : $x \leq x_0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0)$ (1) για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$.
– Αφού f συνεχής στο x_0 και $f'(x)<0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$
Έτσι έχουμε : $x \geq x_0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0)$ (2) για κάθε $x \in [x_0, \beta)$.
– Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α , β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

18. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α , β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α , β) . (2014 Ε – 2018 Ε)

–Αφού η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, έστω ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 , θα είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως για $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.
Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f .
– Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α , β).
Πράγματι , έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.
Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$ θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$
Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$ θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$
Αν $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$
Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α , β).

19. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι:
− Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ .
− Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει την μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ (2003Ε−2010−2015 Ε)

− Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ αφού :
$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$
− Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν οι σχέσεις :
$F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε θα είναι και $F'(x) = G'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Άρα από το πόρισμα της σταθερής συνάρτησης θα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x \in \Delta$.

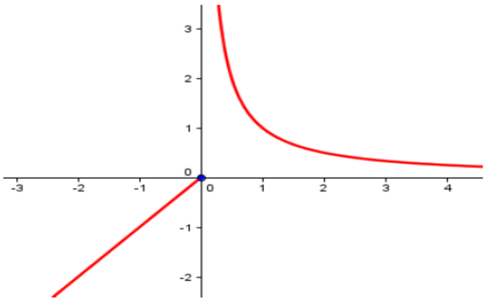
20. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α , β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α , β] , να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$. (2002−2008 Ε−2013)

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f , αφού
$F'(x) = \left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x)$.
Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο [α , β], θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε : $G(x) = F(x) + c$. (1)
− Για $x = \alpha$ η (1)$\Rightarrow G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_\alpha^\alpha f(t)dt + c = c$, άρα $c = G(\alpha)$, άρα $G(x) = F(x) + G(\alpha)$. (2)
− Για $x = \beta$ η (2)$\Rightarrow G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) \Leftrightarrow G(\beta) = \int_\alpha^\beta f(t)dt + G(\alpha) \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ΒΑΣΙΚΑ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη , τότε είναι και 1-1
Το αντίστροφο δεν ισχύει. (2018)
Δηλαδή, αν μια συνάρτηση είναι 1-1 , αυτό δεν σημαίνει ότι υποχρεωτικά είναι και γνησίως μονότονη.

Πράγματι , η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ , \ x \leq 0 \\ \frac{1}{x} \ , \ x > 0 \end{cases}$
είναι συνάρτηση 1-1 ,
αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη ,
αφού είναι γνησίως αύξουσα για $x \leq 0$,
ενώ γνησίως αύξουσα για $x > 0$



2) Αν ισχύουν $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ τότε ισχύει $\lim\limits_{x \to 0}\big(f(x) + g(x)\big) = 0$ (2018Ε)

Η πρόταση αυτή είναι ψευδής .
Πράγματι, αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$
τότε $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} + 1\right) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ αλλά όμως γίνεται :
$\lim\limits_{x \to 0}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x \to 0}\left(-\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$

3) Αν για κάθε x κοντά στο x_0 είναι $f(x) > 0$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ τότε και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$

Η πρόταση αυτή είναι ψευδής .
Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = |x|,\ x \neq 0$ τότε $f(x) > 0\ \forall x \neq 0$, αλλά $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

4) Για κάθε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f όταν το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 (2019)

Η πρόταση αυτή είναι ψευδής. Πράγματι :
Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \ , \ x \neq 1 \\ 2019 \ , \ x = 1 \end{cases}$ έχει $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x + 1) = 2$
και $f(1) = 2019$, άρα $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

5) Αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αυτό δεν σημαίνει ότι θα είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. **(2017)**

Πράγματι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό αφού: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x} = -1$ ενώ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x} = 1$

6) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = 0$, $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ τότε η f είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ **(2019)**

Η πρόταση αυτή είναι ψευδής . Πράγματι :

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1 \ , & x < 0 \\ 1 \ , & x > 0 \end{cases}$ έχει $f'(x) = 0$, $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

<u>7) Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε δεν ισχύει υποχρεωτικά $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.</u>

Πράγματι η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά δεν ισχύει $f'(x) > 0$ αφού $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ μιας και $f'(0) = 0$.

– Ομοίως για την γνησίως φθίνουσα με $f(x) = -x^3$

8) Το αντίστροφο του θεωρήματος Fermat δεν ισχύει .
Δηλαδή, αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και $f'(x_0) = 0$ τότε το x_0 δεν είναι πάντα θέση τοπικού ακροτάτου

Πράγματι η συνάρτηση $f(x) = x^3$ έχει $f'(0) = 0$, όμως το 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

9) Αν f συνεχής σε ένα διάστημα Δ, δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε f κυρτή στο Δ. Το αντίστροφο δεν ισχύει .

Δηλαδή, αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και κυρτή στο Δ, τότε δεν ισχύει υποχρεωτικά $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.
Πράγματι, η συνάρτηση $f(x) = x^4$ έχει $f'(x) = 4x^3$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα $\mathbb{R}$,
επομένως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, αλλά δεν ισχύει $f''(x) > 0$ αφού $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ μιας και $f''(0) = 0$.
– Ομοίως για την κοίλη με $f(x) = -x^4$

10) Αν f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ και ισχύει $f''(x_0) = 0$, αυτό δεν σημαίνει ότι το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f **(2017 Ε)**

Πράγματι , η συνάρτηση $f(x) = x^4$, με $f''(x) = 12x^2$ έχει $f''(0) = 0$, αλλά το 0 δεν είναι θέση σημείου καμπής της f , γιατί η συνάρτηση είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και επομένως δεν έχει σημεία καμπής.

1. Η έννοια της Συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης εισήχθηκε στα μαθηματικά από τον **Leibniz** το 1694. Στον **Euler** ,το 1748, οφείλεται ο όρος “συνάρτηση” (function) καθώς και ο συμβολισμός f(x).
Ο **LEONARD EULER** (1707–1783) ήταν ο μεγαλύτερος μαθηματικός του 18ου αιώνα και ο παραγωγικότερος όλων των εποχών

Α. Εύρεση πεδίου ορισμού συνάρτησης

1.1 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+2x-3}$ β) $f(x) = \dfrac{x+4}{|2x-3|-5}$

γ) $f(x) = \sqrt{x^2-3x-4}$

δ) $f(x) = \ln(-x^2+3x+10)$ ε) $f(x) = \dfrac{5^x-4}{\sqrt{3-|x+1|}}$

ζ) $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln(x-2)}$

1.2 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{5x}{x^3-x^2-2x}$ β) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$

γ) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-5}{x+2}}$ δ) $f(x) = \dfrac{5}{3-|x-2|}$

1.3 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = \sqrt{5-|x+1|}$ β) $f(x) = \sqrt{|2x+1|-7}$

γ) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-4}\right)$ δ) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-3x^2+x+2}$

1.4 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x-2} + \dfrac{5}{x-3}$ β) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

γ) $f(x) = \sqrt{12-x-x^2}$ δ) $f(x) = \ln(1-x^2)$

1.5 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{x-2}{e^{2x}-e^x-2}$ β) $f(x) = \dfrac{4}{\ln(x-1)-1}$

γ) $f(x) = \ln(e^x-1)$ δ) $f(x) = \sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x-2}}$

1.6 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-|3-x|}}{\ln x}$ β) $f(x) = \log(|x|-3)$

γ) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x-e^{-x}}$ δ) $f(x) = \left(\sqrt{x}-1\right)^{\sqrt{x}-2}$

1.7 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-7}}{x^2-9x+8}$ β) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3-8}}{2^x-16}$

γ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-9x+8} + \ln(81-x^2)$

1.8 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = \ln\dfrac{x-1}{x+2}$ β) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\ln x-1}$

γ) $f(x) = \sqrt{\ln(x-3)}$

1.9 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{5x-7}{2\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu x}$ β) $f(x) = \dfrac{x^2+8}{\sigma\varphi x-\sqrt{3}}$

γ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\varepsilon\varphi x-1}$ δ) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{2^x-1}$

ε) $f(x) = \ln(x^2+x-2) + \ln\dfrac{x+3}{3-x}$

1.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 2}{x^3 + 8}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq \dfrac{1}{4}$

1.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

Domain of definition
ή απλώς **domain**
το πεδίο ορισμού
στα Αγγλικά

Β. Τιμή Συνάρτησης στο x_0

1.12 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
και τις τιμές $f(-3)$ και $f(f(2))$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 8$.

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης
$\dfrac{f(\alpha+\beta) - f(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}$ με $\alpha, \beta \neq 0$

1.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 + 10x + 2\alpha}{x^3 + \alpha}$
για την οποία ισχύει $f(1)=3$.

α) Να βρείτε την τιμή του α και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 1$.

1.14 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln(x+\alpha)}{\ln(\beta - x)}$
για την οποία ισχύει $f(-1) = 1$ και $f(-6) = 0$.
Να βρείτε:

α) τους αριθμούς α και β

β) το πεδίο ορισμού της f

Γ. Συναρτήσεις Πολλαπλού Τύπου

1.15 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 , & \text{αν } x \leq 4 \\ x^2 - 1 , & \text{αν } 4 < x \leq 10 \end{cases}$.
Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να υπολογίσετε τις τιμές $f(-3)$, $f(4)$, $f(10)$.

1.16 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x) = \begin{cases} x + \alpha , & \text{αν } -6 \leq x < -1 \\ x^2 + \beta , & \text{αν } -1 \leq x < 7 \end{cases}$
για την οποία ισχύει $f(-2) = 5$ και $f(5) = 24$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

γ) Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$ και $f(f(-3))$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.

1.17 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \alpha\ln x + \beta , & \text{αν } x > 0 \\ \alpha e^x - \beta , & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$
για την οποία ισχύει $f(0) = -1$ και $f(1) = 3$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

1.18 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 , & \text{αν } x \leq 1 \\ 1 - x , & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$, $f\big(f(4)\big)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\text{συν}\alpha) = \dfrac{7}{4}$

Δ. Εύρεση Τύπου Συνάρτησης – Συναρτησιακές Σχέσεις

1.19 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f για την οποία ισχύει: $3f(x) - 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 5x^2$, $\forall x \neq 0$.

1.20 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f για την οποία ισχύει:
$f(x) + x \leq 2x^2 \leq f(x+1) - 3x - 1 , x \in \mathbb{R}$.

1.21 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f για την οποία ισχύει: $f(x) + 2f(3 - x) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

1.22 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f για την οποία ισχύει: $f(x) + x \leq x^2 \leq f(x+1) - x$, $x \in \mathbb{R}$.

1.23 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) + 3\,f(2 - x) = -4x$, $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε :

α) την τιμή $f(1)$

β) τον τύπο της συνάρτησης f

1.24 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f για την οποία ισχύει:
$f(x) + 3x \le x^2 \le f(x-2) + 7x - 10 \,,\, x \in \mathbb{R}$

1.25 Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, $x, y > 0$.
Να δείξετε ότι:
α) $f(1)=0$
β) $f(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right)$, $y > 0$
γ) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, $x, y > 0$

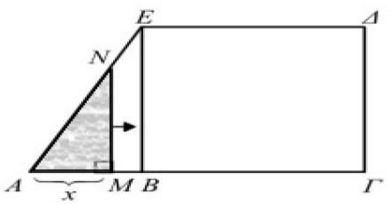
1.26 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f για την οποία ισχύει :
$f(x-3) - 2f(1-x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

1.27 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f για την οποία ισχύει: $f^2(x) = 4e^x(f(x) - e^x)$, $x \in \mathbb{R}$.

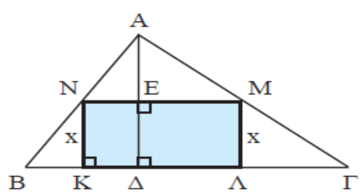
1.28 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης
$f:\mathbb{R} - \{0,1\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x+1}{x-1}$,
$x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$

1.29 Σύρμα μήκους 20 cm κόβεται σε δύο τμήματα
Με το ένα από αυτά, μήκους x cm, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο ισόπλευρο τρίγωνο.
Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x **(Σχολικό)**

1.30 Στο παρακάτω σχήμα το ΕΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2 και $AB = 1$.
Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου συναρτήσει του x , όταν το σημείο Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ.**(Σχολικό)**



1.31 Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ με ύψος x cm είναι εγγεγραμμένο σε τρίγωνο ΑΒΓ βάσης $ΒΓ = 10$ cm και ύψους $ΑΔ = 5$ cm
Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε και η περίμετρος Ρ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x **(Σχολικό)**



Ε. Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

1.32 Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:
α) $f(x) = x^2 + 2x - 8$ β) $f(x) = |2x-1| - 5$
γ) $f(x) = \ln(x-2)$
δ) $f(x) = e^x + 2$ ε) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$

1.33 Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:
α) $f(x) = \ln^2 x - \ln x$ β) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
γ) $f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$ δ) $f(x) = e^{x^2-x-2} - 1$

1.34 Να βρείτε την σχετική θέση με τον άξονα x'x των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:
α) $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$
β) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ γ) $f(x) = \frac{9x^2-9x-4}{3x+1}$

1.35 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x :
α) $f(x) = x^3 - 4x$ β) $f(x) = 1 - \ln x$
γ) $f(x) = 2e^x - 2$

1.36 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x :
α) $f(x) = \frac{x+1}{x^3-3x^2-4x+12}$
β) $f(x) = \ln(x+1) + \ln(1-x)$

1.37 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) - 2f^2(x) + 4f(x) = -x^2 + x - 1$.
Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x'x

1.38 Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:
α) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ και $g(x) = x^2 + x + 1$
β) $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^2 + x - 1$
γ) $f(x) = x\ln x - 2x$ και $g(x) = x$
δ) $f(x) = 3^{2x+5}$ και $g(x) = 3^{x+2} + 2$

1.39 Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:
α) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $g(x) = \frac{6}{x}$
β) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x^2 + x + 2$

1.40 Να βρείτε την σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων f και g :
α) $f(x) = x^3 + x$ και $g(x) = 3x^2 - 2$
β) $f(x) = \ln^2 x$ και $g(x) = \ln x + 2$
γ) $f(x) = g(x) + x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

1.41 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g όταν :
α) $f(x) = x^2$ και $g(x) = 6x - 8$
β) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ και $g(x) = x^2 - 4x + 1$
γ) $f(x) = x^2 - e^x$ και $g(x) = x^2 e^x - 1$

1.42 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - x - 12}$.
Να βρεθούν:
α) το πεδίο ορισμού της f
β) τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες
γ) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x

1.43 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 3}{x - 2}$ και $g(x) = x^2 + 2x$. Να βρεθούν:
α) τα κοινά σημεία των C_f , C_g
β) τα διαστήματα που η C_g βρίσκεται πάνω από την C_f

1.44 Δίνονται οι συναρτήσεις :
$f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ και $g(x) = 2^{x+1} - 8$.
Να βρεθούν:
α) τα κοινά σημεία των C_f , C_g
β) τα διαστήματα που η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g

1.45 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x + 2$ και η ευθεία $\varepsilon : 6x - y - 4 = 0$. Να βρεθούν:
α) τα κοινά σημεία των C_f και της ε
β) τα διαστήματα C_f βρίσκεται πάνω από την ε .

1.46 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 , & \text{αν } x \le 0 \\ \ln x , & \text{αν } x > 0 \end{cases}$
Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f :
α) με τον άξονα x'x
β) με την ευθεία $y = 1$

1.47 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\lambda x + 5}{x^2 + \lambda x + 1}$
α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η συνάρτηση να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1 , \lambda + 1)$

1.48 Δίνονται οι συναρτήσεις :
$f(x) = x^3 + 2\alpha$ και $g(x) = 2\beta x^2 + 5x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Να βρεθούν οι αριθμοί α , β ώστε οι C_f και C_g να έχουν κοινά σημεία πάνω στις ευθείες $x = 1$ και $x = -2$. Κατόπιν να βρεθούν όλα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f , C_g

1.49 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ και $g(x) = x^3 - 3x^2 + \beta - 6\alpha$, με $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$.
Αν η C_f τέμνει τον άξονα x'x στο -3 και η C_g τέμνει τον άξονα y'y στο -6 να βρείτε :
α) τους αριθμούς α και β
β) τα σημεία τομής των C_f , C_g

1.50 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x - \alpha)e^x + \beta$ τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο με τεταγμένη 1 και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο με τεταγμένη 2 . Να βρείτε :
α) τις τιμές των α και β
β) τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = 2x$

1.51 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha - 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-3 , 5)$, να βρείτε :
α) τον πραγματικό αριθμό α
β) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
γ) τα σημεία τομής της C_f με την γραφική παράσταση της $g(x) = -4x + 1$

1.52 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x) = \ln(x^2 - 2x + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων , να βρείτε:
α) τον πραγματικό αριθμό α
β) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
γ) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x
δ) τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = 2\ln 3$

1.53 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha , & x \le 1 \\ |x - 2| + \alpha + 1 , & x > 1 \end{cases}$.
Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-3 , 5)$, να βρείτε :
α) τον πραγματικό αριθμό α
β) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

1.54 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\dfrac{\alpha - x}{\alpha + x}$
Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, -\ln 3)$,
α) Να βρείτε :
α1) τον πραγματικό αριθμό α
α2) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

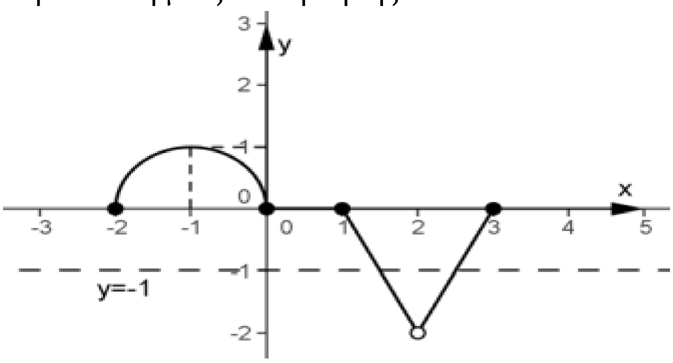
1.55 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ ώστε : $2xf(x) - x\,f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 - 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}^*$.
Να βρείτε :
α) τον τύπο της συνάρτησης f
β) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
γ) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x’x

1.56 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(\frac{x}{e}\right) \le \ln x \le f(x) - 1$, $x > 0$ Να βρείτε :
α) τον τύπο της συνάρτησης f
β) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

1.57 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(8 - 3x) + f(x) = 2g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο
β) Αν $3f(x) - 2f(2 - x) = 2x - x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τους τύπους των f, g και το κοινό σημείο.

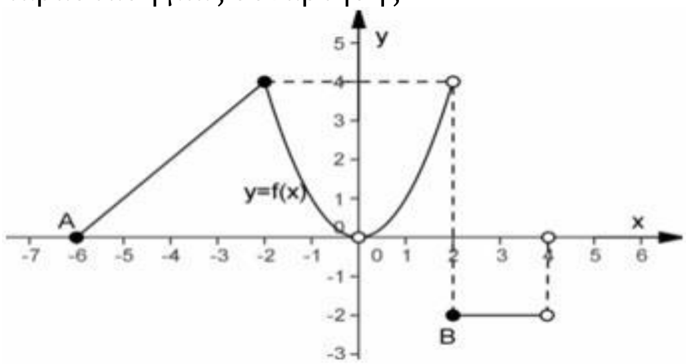
1.58 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^3(x) - 2f^2(x) + 5f(x) = -e^{2x} - e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x’x

1.59 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



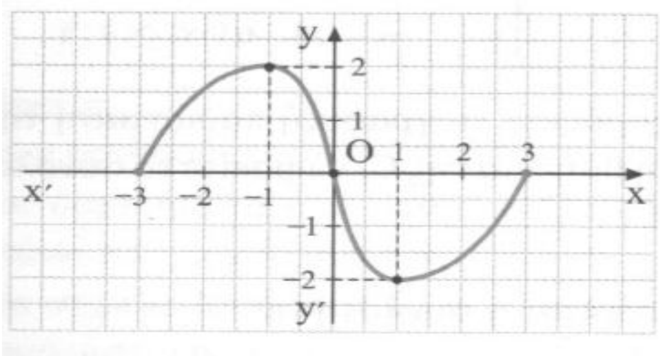
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να βρείτε το $f(-1)$
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$
ε) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x)>0$ και $f(x)<0$.
ζ) Να εξετάσετε αν το -1 είναι τιμή της συνάρτησης.

1.60 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



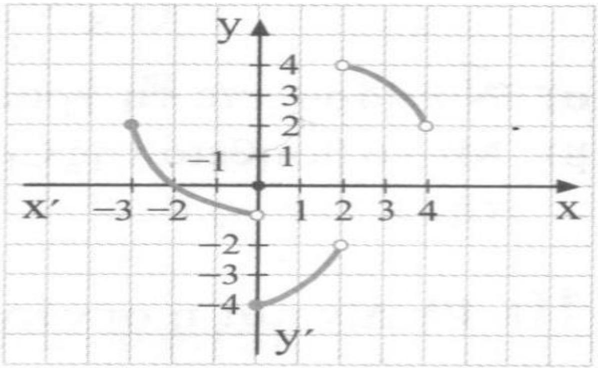
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να βρείτε το $f(2)$
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
ε) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $f(x) < 0$.
ζ) Να εξετάσετε αν το 0 είναι τιμή της συνάρτησης

1.61 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



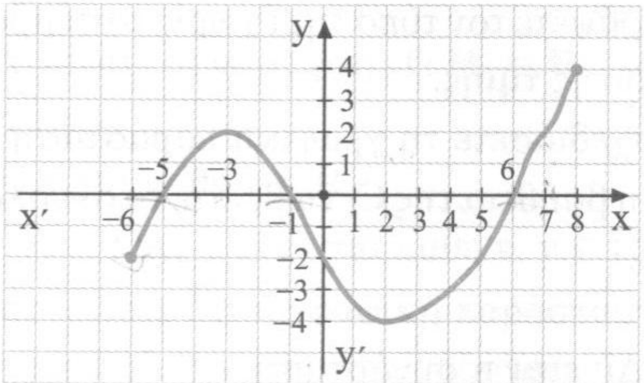
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 0$, $f(x) = 2$ και $f(x) = -2$,
δ) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $f(x) < 0$, $f(x) \le 2$, $f(x) < -2$

1.62 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



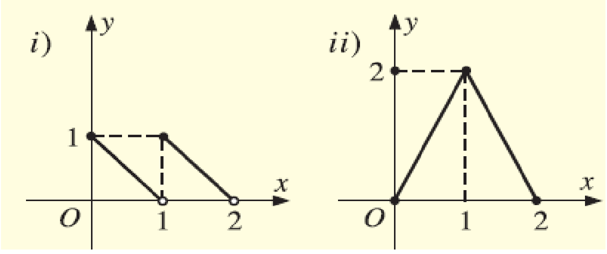
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να βρείτε την τιμή $f(f(-2))$
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$
ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$ και την $f(x) < 2$

1.63 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

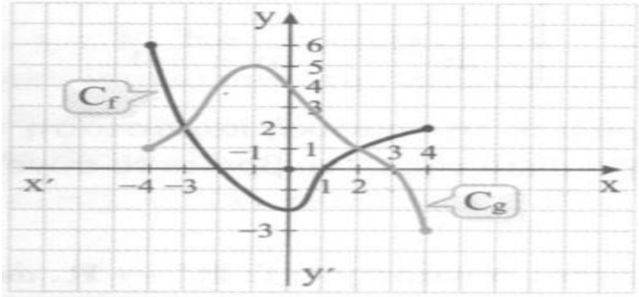


α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να βρείτε τις τιμές $f(7)$, $f(f(4))$ και $f(f(6))$
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$, $f(x) = -2$
ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

1.64 Να προσδιορίσετε την συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι: **(Σχολικό)**



1.65 Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f , g
β) Να βρείτε τις τιμές $f(g(0))$, $g(f(0))$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$
δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x)$
ε) Να λύσετε την ανίσωση $g(x) \leq 0$

ΣΤ. Ισότητα Συναρτήσεων

1.66 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις

α) $f(x) = \dfrac{e^{3x} - 2xe^{x}}{xe^{x}}$ και $g(x) = \dfrac{e^{2x}}{x} - 2$

β) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2|x|}$, $g(x) = 1 - \dfrac{2}{|x|}$

1.67 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις

α) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ και $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x+1)^2}$

β) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4|x|}$, $g(x) = 1 + \dfrac{4}{|x|}$

γ) $f(x) = \sqrt{x} + 3$, $g(x) = \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

1.68 Να αποδείξετε ότι είναι ίσες οι συναρτήσεις

$f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4}$, $g(x) = (x+3)^2 - x^2 - 5x - 11$

1.69 Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f = g$. Στην περίπτωση που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο να ισχύει $f(x) = g(x)$

α) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$ και $g(x) = \sqrt{x+2}\sqrt{x-3}$

β) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$, $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$

γ) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$ και $g(x) = 2\ln x - \ln(1 - x)$

1.70 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(f(x)+g(x))^2 = 4f(x)\cdot g(x)$. Να δείξετε ότι $f = g$

1.71 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

$\frac{(f(x))^2+(g(x))^2}{2x} = f(x)+g(x)-x$, $\forall x \neq 0$.

Να δείξετε ότι $f = g$

1.72 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$f^2(x)+g^2(x)+8x^2 \leq 4x(f(x)+g(x))$.

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

1.73 Να βρείτε τις τιμές των α , β , γ για τις οποίες οι συναρτήσεις

$f(x) = \alpha x^2(x-1)+\beta x(x-2)+\gamma$

και $g(x) = x^3+3x^2-8x+5$ είναι ίσες .

1.74 Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x) = \frac{\lambda x^2-3x+\lambda}{x-\lambda^2}$ και

$g(x) = \frac{x^2-(\lambda+2)x+2\lambda-1}{x-3\lambda+2}$

Να βρείτε για ποια τιμή του λ οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

1.75 Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x) = \frac{(\lambda+1)x-2\lambda-1}{x-2\lambda^2+\lambda-2}$ και

$g(x) = \frac{[(1-\lambda)^8+\lambda]x+(\lambda-3)^5-4}{x-\lambda^2-2\lambda}$

Να βρείτε για ποια τιμή του λ οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

1.76 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι ίσες οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{-\lambda x^3+3x-4}{x^2-\lambda x+4}$

και $g(x) = -\lambda x-1$

1.77 Να βρείτε τα α , $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις

$f(x) = \frac{x^2-\alpha x+\beta}{x-\alpha+2}$ και

$g(x) = \frac{x^2-(\alpha+\beta-1)x+2\alpha-3}{x+\beta-1}$ να είναι ίσες.

1.78 Να βρείτε τα α , $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις

$f(x) = \frac{2x+5}{x^2-7x+10}$ και $g(x) = \frac{\alpha}{x-2}+\frac{\beta}{x-5}$

να είναι ίσες

1.79 Δίνεται η $f(x) = \alpha-5-\frac{\alpha}{|x|}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-3,-1)$.

α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης καθώς και τον αριθμό α .

β)Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

γ)Να βρείτε για ποια τιμή του x η C_f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της $g(x) = |x|-4$.

δ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και $h(x) = \frac{x^2-36}{x^2+6|x|}$ είναι ίσες .

Ζ. Πράξεις μεταξύ Συναρτήσεων

1.80 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x}$.
Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$

1.81 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\sqrt{6-x}$.
Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$

1.82 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\sqrt{2-x}$.
Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$

1.83 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+2}$
και $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x-6}$
Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$

1.84 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ και $g(x)=\sqrt{1-2x}$.
Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$

1.85 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=\ln x-3$, $g(x)=e^x-2$.
Να λύσετε την ανίσωση: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)\geq 0$

1.86 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$
Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$
(Σχολικό)

2. Σύνθεση Συναρτήσεων

Α. Ορισμός Σύνθεσης Συναρτήσεων

2.1 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=\sqrt{2-x}$ και $g(x)=x^2+2x-6$.
Να ορίσετε την fog.

2.2 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$, $g(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$
Να ορίσετε, αν ορίζονται, τις συναρτήσεις fog , gof , fof.

2.3 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$.
Ισχύει $fog=gof$;

2.4 Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$.
Να ορίσετε την συνάρτηση gog.

2.5 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=\sqrt{2-x}$ και $g(x)=\ln x$.
Να ορίσετε, αν ορίζονται, τις συναρτήσεις fog και gof

2.6 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=\sqrt{x-2}$ και $g(x)=\ln(6-2x)$.
Να ορίσετε, αν ορίζονται, τις συναρτήσεις fog και gof

2.7 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=\ln x$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$.
Να ορίσετε την fog. **(ΘΕΜΑ 2017)**

2.8 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ και $g(x)=\sqrt{2x+8}$.
Να ορίσετε, αν ορίζονται, τις συναρτήσεις fog και gof

2.9 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=\sqrt{2x-1}$ και $g(x)=\ln(9-x^2)$.
α) Να ορίσετε την συνάρτηση gof.
β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της gof με τον άξονα x'x

2.10 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$
και $g(x)=\ln(x-1)$
Να ορίσετε τις συναρτήσεις fog , gof , fof.

2.11 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=x-1$ και $g(x)=x^2-2x+3$.
Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων fog και gof.

2.12 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=2x+\alpha$ και $g(x)=3x+2\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
Αν οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται πάνω στην ευθεία $x=1$, να βρείτε τον αριθμό α και να δείξετε ότι $fog=gof$

2.13 Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :
α) αν οι συναρτήσεις f , g είναι περιττές , τότε και η fog είναι περιττή .
β) αν η συνάρτηση f είναι άρτια και η g είναι περιττή , τότε η fog είναι άρτια .

2.14 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$
και $g(x)=\ln(x-1)$
α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων και να απλοποιήσετε τον τύπο της f
β) Να βρείτε την συνάρτηση gof
γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_{gof} βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x

2.15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+\alpha}{x+1}$, $\alpha\in\mathbb{R}$
της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-2,3)$.
α) Να βρείτε τον αριθμό α
β) Να ορίσετε την συνάρτηση fof
γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $(fof)(x)$ και $g(x)=\dfrac{-x-1}{x^2+x}$ είναι ίσες

2.16 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - \alpha}{x+1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
της οποίας η C_f τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο με τετμημένη 1
α) Να βρείτε τον αριθμό α
β) Να ορίσετε την συνάρτηση fof
γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις
$(fof)(x)$ και $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+1}$ είναι ίσες

2.17 Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
για την οποία ισχύει $2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x^3$, $x > 0$.
α) Να βρείτε τη συνάρτηση f.
β) Αν $g(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1}$ να βρείτε τη συνάρτηση gof καθώς και τα σημεία τομής της με τους άξονες.

2.18 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x) = \ln(1 - e^x)$ και $g(x) = \ln x^2$.
Να ορίσετε την συνάρτηση fog.

2.19 Να ορίσετε την συνάρτηση gof αν :
α) $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{x}$
β) $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ **(Σχολικό)**

2.20 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x - 2}$.
Να ορίσετε, αν ορίζονται, τις συναρτήσεις fog και gof **(Σχολικό)**

Composite function of f and g,
η σύνθεση της f με την g στα Αγγλικά

Β. Αποσύνθεση Συναρτήσεων

2.21 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ώστε $(fog)(x) = 3x^2 - 6x + 10$ και $f(x) = 3x + 1$
Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$.

2.22 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ώστε $(fog)(x) = \eta\mu^2 x + x^4 + 1$ και $f(x) = 2x - 5$
Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$.

2.23 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ώστε $(fog)(x) = x^2 + 4$ και $f(x) = e^{2x-5}$
Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$.

2.24 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
για τις οποίες ισχύει
$(gof)(x) = 4x^2 + 4$ και $f(x) = 2x - 1$.
Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$.

2.25 Δίνονται οι συναρτήσεις f και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ώστε $(fog)(x) = 2x + 1$ και $f(x) = \ln x$, $x > 0$.
Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$.

2.26 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ώστε να ισχύει $(fog)(x) = x + 8$ και $f(x) = e^{x+1}$.
Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$.

2.27 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ώστε να ισχύει
$(fog)(x) = 4x^2 - 14x + 13$ και $g(x) = 2x - 3$.
Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$.

2.28 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ώστε να ισχύει
$(fog)(x) = 2x^2 - 11x + 16$ και $g(x) = x - 3$.
Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$.

2.29 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
για τις οποίες ισχύει
$(fog)(x) = \dfrac{2 - x}{2 + x}$, $x > 0$ και $g(x) = \ln x$.
Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$.

2.30 Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$, αν
$(gof)(x) = \dfrac{x}{2x^2 + 2x + 1}$ και $f(x) = 2x + 1$

2.31 Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$, αν
$(gof)(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$ και $g(x) = x - 2$

2.32 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ώστε να ισχύει
$(fog)(x) = 4x^2 - 1$ και $g(x) = 2x + 1$
α) Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$.
β) Να ορίσετε την συνάρτηση fof

2.33 Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$
αν $f(e^x) = 3x^2 - 2x + 4$, $x \in \mathbb{R}$

2.34 Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$
αν $f(2x - 1) = 4x^2 - 6x + 3$, $x \in \mathbb{R}$

2.35 Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$
αν $f(\ln x) = x^2 + 3\ln x + 1$, $x > 0$

2.36 Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
$f(2x-3) = x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε :
α) τον τύπο της f
β) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

2.37 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με
$(g o f)(x) = 3x^2 - 6x + 10$ και $g(x) = 3x - 2$.
Να βρείτε :
α) τη συνάρτηση f
β) τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g

2.38 Δίνονται οι $f(x) = \ln x$, $g(x) = \dfrac{\alpha - x}{x+3}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
Αν η C_g διέρχεται από το σημείο $A(-5, -4)$:
α) να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α
β) να ορίσετε την συνάρτηση fog
γ) να αποδείξετε ότι η fog είναι περιττή

2.39 Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$ ώστε να ισχύει
α) $(g o f)(x) = 4x^2 - 2x + 1$ και $f(x) = 1 - 2x$
β) $(g o f)(x) = x + 2$ και $f(x) = e^{x-1}$

2.40 Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$ ώστε να ισχύει
α) $(f o g)(x) = x^2 + 3$ και $f(x) = x^3 - 1$
β) $(f o g)(x) = 9x^2 - 3\eta\mu x + 1$ και $f(x) = 3x + 1$

2.41 Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$ ώστε να ισχύει
α) $(f o g)(x) = x^2 + 2x + 2$ και $g(x) = x + 1$
β) $(f o g)(x) = \sqrt{1 + x^2}$ και $g(x) = -x^2$ **(Σχολικό)**

2.42 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = f(f(0))$
δ) Αν επιπλέον ισχύει $(g o f)(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ να βρείτε να τον τύπο της g

Γ. Εύρεση Πεδίου Ορισμού Σύνθεσης

2.43 Δίνεται η συνάρτηση $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$.
Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(2x - 3)$

2.44 Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.
Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(\ln x)$

2.45 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$.
Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :
α) $f(3x - 2)$ β) $f(\ln x)$ γ) $f(e^x)$

2.46 Δίνεται η συνάρτηση $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$.
Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f(x^2 - 5)$

2.47 Δίνεται η συνάρτηση $f : [1, 9] \to \mathbb{R}$.
Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :
α) $h(x) = f(4x^2 - 7)$ β) $g(x) = f(\ln x)$
γ) $\varphi(x) = f(3 - x)$

Δ. Εύρεση τιμής $f(x_o)$ όταν είναι γνωστή η fof

2.48 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f o f)(x) = 3x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

2.49 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f o f)(x) = x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

2.50 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $(f o f)(x) = 3x^2 + 2x - 80$, $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε την τιμή $f(5)$.

2.51 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f o f)(x) = 3x + 4$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι $\left(f(3x + 4)\right) = 3f(x) + 4$, $x \in \mathbb{R}$.
β) Να υπολογίσετε την τιμή $f(-2)$.

Ε. Εύρεση Μεταβλητών στην Σύνθεση

2.52 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x) = \alpha x - 1$ και $g(x) = 7x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε για ποιες τιμές του α
οι συναρτήσεις fog και gof είναι ίσες.

2.53 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x) = \alpha x + 1$, $g(x) = (3\alpha - 2)x + \alpha^2 - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει $fof = g$.

2.54 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x) = 2x - 1$ και $g(x) = 3\alpha x + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε για ποιες τιμές του α
οι συναρτήσεις fog και gof είναι ίσες.

2.55 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x + 3$,
$g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $h(x) = 4x^2 + \beta x + 2\gamma$.
Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α , β , γ
για τους οποίους ισχύει $gof = h$

2.56 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3 - \alpha x}{2 - x}$.
Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \neq 2$
να ισχύει $(fof)(x) = x$.

2.57 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x) = x + 1$ και $g(x) = \alpha x + 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε για ποιες τιμές του α
οι συναρτήσεις fog και gof είναι ίσες. **(Σχολικό)**

3. Μονοτονία Συνάρτησης

Α. Υπολογισμός Παραγώγων Βασικών Συναρτήσεων

3.1 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων
α) $f(x) = 3x + 7$ β) $f(x) = x^2 + 5x + 2016$
γ) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$
δ) $f(x) = 3e^x + 2\ln x + 7\sqrt{x}$
ε) $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x + \dfrac{4}{x} - 2^x$

3.2 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων
α) $f(x) = xe^x$ β) $f(x) = x\ln x$
γ) $f(x) = x^2\eta\mu x$
δ) $f(x) = x^3\ln x$ ε) $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$

3.3 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων
α) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ β) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+5}$
γ) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{2x+3}$ δ) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$
ε) $f(x) = \dfrac{x-3}{e^x}$ ζ) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ η) $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$

3.4 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων
α) $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$ β) $f(x) = \eta\mu(2x + 3)$
γ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^2 + 5x)$
δ) $f(x) = e^{x^2 - 5x + 3}$ ε) $f(x) = \sqrt{4x - 5}$
ζ) $f(x) = (3x - 2)^5$

Β. Μελέτη Μονοτονίας

3.5 Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :
α) $f(x) = 2x^3 + 6x - 1$ β) $f(x) = e^x + \ln x$
γ) $f(x) = -x^5 - x^3 - \ln x$

3.6 Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :
α) $f(x) = 1 - 3x + \sqrt{1 - 2x}$
β) $f(x) = 4e^{3-x} + 2018$ γ) $f(x) = x^5 - \dfrac{1}{2x}$

3.7 Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :
α) $f(x) = \sqrt{1 - x}$ β) $f(x) = 2\ln(x - 2) - 1$
γ) $f(x) = 3e^{1-x} + 1$
δ) $f(x) = (x - 1)^2 - 1$, $x \le 1$ **(Σχολικό)**

3.8 Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :
α) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ β) $f(x) = \dfrac{2}{x} - \ln x + 1$
γ) $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x - 4x$

3.9 Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :
α) $f(x) = \ln(x - 1) - e^{2-x}$ β) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$
γ) $f(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x}$

3.10 Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :
α) $f(x) = \dfrac{3x}{2+x}$ β) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ γ) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$

3.11 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :
α) αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες , τότε και η fog είναι γνησίως αύξουσα .
β) αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες τότε η fog είναι γνησίως αύξουσα .

3.12 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g είναι γνησίως αύξουσα , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = \dfrac{f}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα .

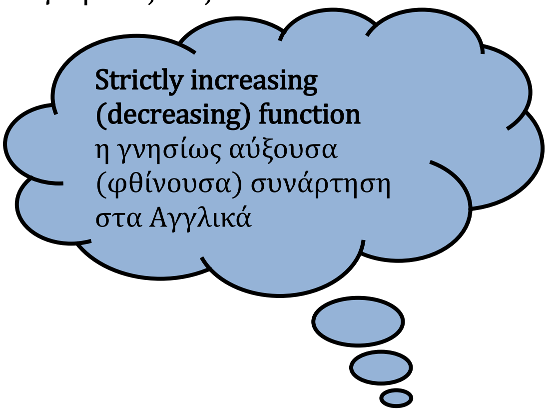
3.13 Έστω οι συναρτήσεις f, g που είναι γνησίως φθίνουσες σε ένα διάστημα Δ .
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως φθίνουσα .

3.14 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία :
α) $A(2, 5)$ και $B(4, 3)$
β) $\Gamma(-1, 6)$ και $\Delta(3, 8)$

3.15 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η C_f τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα σημεία με τετμημένη -2 και τεταγμένη 1 αντίστοιχα.
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Αν g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις gog, fog.

3.16 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = 5x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

3.17 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + e^{f(x)} = 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$



Γ. Μονοτονία και Ανισώσεις

3.18 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την ανίσωση
$$\frac{1}{x^2+5} - \frac{1}{2x^2+1} < \ln\frac{x^2+5}{2x^2+1} .$$

3.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x$.
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την ανίσωση
$\ln(x^2+x+1) + x^2 < \ln(x+2) + 1$.

3.20 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2007} + 2007^x$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την ανίσωση
$2007^{3x-1} - 2007^{x+3} > (x+3)^{2007} - (3x-1)^{2007}$

3.21 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$.
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την ανίσωση
$(x^3+x^2)^3 - (x+1)^3 > 2(x+1-x^3-x^2)$

3.22 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2x$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{4}{9}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x < 2x$

3.23 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x$.
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την $2^{3x-x^2} - x^2 < 2^{6-2x} - 5x + 6$

3.24 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + 4x$.
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την ανίσωση $2^{1-x} + 4 < 4x + 6$

3.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$.
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την ανίσωση
$$\frac{1}{2x^2+3} - \frac{1}{x^2+2x+6} > \sqrt{2x^2+3} - \sqrt{x^2+2x+6}$$

3.26 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(1+e^x)$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την ανίσωση $(x-1)^2 > \ln\frac{1+e^{2x}}{1+e^{x^2}}$

3.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - 2x$.
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την $e^{x^2-1} + 4x^2 < e^{x-x^2} + 2(1+x)$

3.28 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x$.
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} + \ln x < e^x$

3.29 Να λύσετε την ανίσωση $e^{1-x} < 1 + \ln x$

3.30 Να λύσετε την ανίσωση $5x^3 + \ln x < \frac{2}{x} + 3$

3.31 Να λύσετε την ανίσωση $e^x + 3x > \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln x$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να βρείτε για ποια τιμή του x η C_f βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της ευθείας $y = 1$
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$(3|x| + 1)^2 - (2|x| + 3)^2 > \ln \frac{2|x| + 3}{3|x| + 1}$

3.33 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x + 2)$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την ανίσωση
$f(x^4 + 1) - f(x^2 + 1) > 0$
γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln \frac{3x}{x^2+2} < x^2 - 3x + 2$

3.34 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να αποδείξετε ότι $e^3 - e^x < \ln \frac{x}{3}$
για κάθε $x > 3$

3.35 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 8e^{2-x} - 2x$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 4$
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$8\left(e^{2-x^2} - e^{2-x}\right) > -2x(1 - x)$

3.36 Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-2, -3)$, να λύσετε την ανίσωση $2f(x^2 - 3x) + 6 \leq 0$.

3.37 Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$.
Να λύσετε την ανίσωση :
$(f o f)(x^2 + x) < (f o f)(x + 1)$

3.38 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x) = \alpha x^3 + 2\alpha x - 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Αν η C_f τέμνει τον άξονα x'x στο 1 :
α) να βρείτε τον αριθμό α
β) να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
γ) να λύσετε την ανίσωση
$f(f(x) + 3x^2 + 3) + 3 > 0$.

3.39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-2, 13)$:
α) να βρείτε τον αριθμό α
β) να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
γ) να λύσετε την ανίσωση $3^x(2x + 5) < 1$.

3.40 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^5 + \alpha x + 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $K(-1, 4)$:
α) να βρείτε τον αριθμό α
β) να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
γ) να λύσετε την ανίσωση $(f o f)(x) > 2$.

3.41 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x) = \alpha^x - \ln x$, $x > 0$, $\alpha \in (0, 1)$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την ανίσωση
$\alpha^{x^2+x+4} - \alpha^{x^2+9} < \ln(x^2 + x + 4) - \ln(x^2 + 9)$

3.42 Δίνεται η $f(x) = \alpha^x + x + 1$, $\alpha > 1$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την ανίσωση
$\alpha^{x^2-9} - \alpha^{x-3} < 6 + x - x^2$

3.43 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(-2, 7)$ τότε :
α) να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
β) να λυθεί η ανίσωση $f(f(|x| - 4) - 6) - 5 < 0$

3.44 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0, 2)$ και $B(2, -3)$ τότε :
α) να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
β) να λυθεί η ανίσωση $f\left(f\left(e^{2x} - 3e^x + 2\right)\right) < -3$

3.45 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-4, 3)$ και $B(3, -2)$ τότε :
α) να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
β) να βρείτε το είδος μονοτονίας της fof
γ) να λυθεί η ανίσωση $f\left(f\left(e^{x-1} - 5\right)\right) > -2$.

3.46 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(5, 13)$ και $B(7, 11)$ τότε :
α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x) - 6) < f(7) + 2$

3.47 Δίνεται η $f(x) = e^x + \ln(x + 1) - 1$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} + \ln(x^2 + 1) > 1$
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$e^{x^2} - e^{x+2} > \ln \frac{x + 3}{x^2 + 1}$

3.48 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ με $x \neq 1$
ισχύει $\ln\frac{x^2+1}{2x} > e^{2x} - e^{x^2+1}$
γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$
ισχύει $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x > x\left(e^x - e^{x+1}\right)$
δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της
$g(x) = f(x+\alpha) - f(x+\beta)$, $\alpha > \beta > 0$
βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x

3.49 Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$
είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
β) Να λυθεί η ανίσωση
$f(x^2 - 2x) - f(3x - 6) > x^2 - 5x + 6$

3.50 Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(2) = 8$
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 - f(x)$
είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
β) Να λυθεί η ανίσωση $8x^3 < f(2x)$

3.51 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \sqrt{5^x + 1}$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λυθεί η ανίσωση
$$(3x+18)^3 - (7x+12)^3 < \frac{5^{7x+12} - 5^{3x+18}}{\sqrt{5^{7x+12}+1} + \sqrt{5^{3x+18}+1}}$$

3.52 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - e^{-x}$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να δείξετε ότι $\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{x^2+1}} > \ln\frac{x}{x^2+1}$, $x > 0$
γ) Για κάθε x , y > 0 με x > y , να δείξετε ότι :
$3\ln x + e^{-y^3} < 3\ln y + e^{-x^3}$
δ) Για κάθε $x > 0$ να αποδείξετε ότι
$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{e^{x+1}} - \frac{1}{e^x}$

3.53 Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
η οποία είναι γνησίως αύξουσα.
Να δείξετε ότι $f(x) + f(3x) < f(2x) + f(7x)$

3.54 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - e^{x+1}$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να μελετηθεί η fof ως προς την μονοτονία
γ) Για κάθε $x < 0$ να δείξετε ότι $f(5^x) < f(7^x)$

3.55 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Για κάθε θετικό ακέραιο ν , να αποδείξετε ότι :
$f(5^\nu) + f(7^\nu) > f(6^\nu) + f(8^\nu)$
γ) Για κάθε θετικό ακέραιο ν , να αποδείξετε ότι :
$f(2x) + 1 > f(3x) + f(e^x)$

3.56 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 8x$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Για κάθε $x > 1$ να αποδείξετε ότι :
$f(x^3) + f(2^x) > f(x^2) + f(2)$
γ) Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι :
$f(3^x) + f(5^x) > f(2^x) + f(4^x)$

3.57 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την
οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι
γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^3) < f(3x - 2)$

3.58 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x^3$
α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f
ως προς την μονοτονία
β)Να λυθούν οι ανισώσεις :
β1) $e^x(x^3 + 1) < 1$ β2) $f(f(x)) < \frac{1}{e} - 1$
β3) $e^{-x} - \frac{2}{x} < x^3 - \ln^3 2$

3.59 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f
στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται
από τα σημεία $A(2, -1)$ και $B(5, 2)$ τότε :
α) να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
β) να λύσετε την ανίσωση $2^{f^2(x)} \leq 4 \cdot 2^{f(x)}$

3.60 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
γνησίως φθίνουσα και $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$f(3 - x) + f(x + 5) = 0$. Να λύσετε την ανίσωση :
$f(x^2 + 2x - 4) < 0$.

3.61 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
γνησίως αύξουσα και $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$f(6 - x) + f(x + 4) = 0$.
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική
ρίζα
β) Να λύσετε την ανίσωση : $f(x^2 + x + 5) > 0$.

3.62 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με f γνησίως φθίνουσα και g γνησίως αύξουσα
α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση fog
β) Να λύσετε την ανίσωση :
$(fog)(x^2 - 4x) \geq (fog)(x - 4)$

3.63 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε:
$f(2x - 1) = -2x + 4\left(1 - e^{2x}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
α) Να δείξετε ότι $f(x) = 3 - x - 4e^{x+1}$
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
γ) Να λύσετε την εξίσωση $(3 - x)e^{-x-1} = 4$
δ) Αν $h(x) = \ln x + 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της foh τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y + 4e^2 = 2$ σε ένα ακριβώς σημείο
ε) Να δείξετε ότι $\dfrac{\pi}{e} > \dfrac{e^{4e}}{e^{4\pi}}$

Δ. Μονοτονία και Εξισώσεις

3.64 Να λυθεί η εξίσωση $2x^5 + 3e^x = 3$.

3.65 Να λυθεί η εξίσωση $x^3 + \ln x - 1 = 0$.

3.66 Να λυθεί η εξίσωση $= 1 + \ln(x - 1)$.

3.67 Να λυθεί η εξίσωση $e^{3-x} - 1 = \ln(x - 2)$

3.68 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x} + 1$
α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(2x + 3) + 1 = \dfrac{1}{2x + 3}$
γ) Να λυθεί η ανίσωση $2x^2 \ln x + x^2 < 1$

3.69 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = 1 - \ln(x + 1)$ έχουν μόνο ένα κοινό σημείο

4. Αντίστροφη Συνάρτηση

Α. Συνάρτηση 1-1

4.1 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1 :

α) $f(x) = 3e^{x-3} - 5$ β) $f(x) = \frac{3\ln x - 2}{4}$

γ) $f(x) = \frac{3-x}{x+1}$

δ) $f(x) = 1 - \sqrt{3-2x}$ ε) $f(x) = 2\ln(x+1) - 3$

στ) $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 2}$

4.2 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1 :

α) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ β) $f(x) = 2 + \sqrt{3x-4}$

γ) $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, $x \geq 1$

4.3 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1 :

α) $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{2-x}}$ β) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

γ) $f(x) = 1 - 2x - 3e^x$ δ) $f(x) = e^{-2x} - x$

4.4 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1 :

α) $f(x) = 2x^5 + 7x^3 + 3x - 5$

β) $f(x) = 3e^x + 2\ln x - 1$

γ) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4x^3$ δ) $f(x) = \frac{5}{x} - 3\ln x$

4.5 Να αποδείξετε ότι δεν είναι 1-1 οι συναρτήσεις :

α) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

β) $f(x) = (x-3)(x-4) + 2018$

γ) $f(x) = \ln(|x|+1)$ δ) $f(x) = |x-3| - 2$

4.6 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x-2)f(x-3) - (x-3)f(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(2)$

β) Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1

4.7 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τον οποία ισχύει $6f(x^2) - f^2(x) \geq 9$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$

β) Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1

4.8 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + f(x) + 1 \leq 3f(x^2 - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1

4.9 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x) \geq f(1) + f(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1

4.10 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f o f)(x) + f^3(x) = 3x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

4.11 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 4f(x) = 2x + 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

4.12 Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ώστε να ισχύει $(g o f)(x) = x^3 + 3f(x) + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

4.13 Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^5(x) + 3f(x) = \ln(2x+1)$, $x > 0$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

4.14 Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, όπου η συνάρτηση $g o f$ είναι 1-1 .

Να δείξετε ότι και η συνάρτηση f είναι 1-1.

4.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1

4.16 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+\alpha}{x^2+1}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1,-1)$. Να βρείτε :

α) τον αριθμό α.

β) το σημείο τομής της C_f με τον άξονα y'y

γ) αν η συνάρτηση f είναι 1-1.

4.17 Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ώστε η $f o g$ να είναι 1-1

α) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1

β) Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $g(f(\ln x) + 1) = g(x+2)$ να βρείτε την $f(x)$.

4.18 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x-y)=f(x)-f(y)$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$
β) Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$
γ) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1

4.19 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $|f(x)-f(y)|\geq|x-y|$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$
Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

4.20 α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^x-e^{-x}$ είναι 1-1
β) Αν για την συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύει $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=x-\dfrac{1}{x}$, $x>0$,
να βρείτε την f

4.21 α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x+\ln x$ είναι 1-1
β) Αν για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύουν $x+e^x=f(x)+\ln f(x)$, $f(x)>0$,
να βρείτε την f

Β. Εξισώσεις και συναρτήσεις 1-1

4.22 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $\ln(x-1)=2-x$ β) $3^x=5-2x$

4.23 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f o f)(x)+f^3(x)=2x+3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λυθεί η εξίσωση $f(2x^3+x)-f(4-x)=0$

4.24 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f o f)(x)+f^3(x)=2x+5$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λυθεί η εξίσωση $f(2x^3+x-2)=f(2-x)$

4.25 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f o f)(x)=f(x)+e^{x-1}$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^3-5x)=f(2x-6)$

4.26 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\eta\mu f(x)+f^3(x)-2x=\pi^3$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λυθεί η εξίσωση $f(e^t+1)-f(2e^{-t})=0$

4.27 Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(f o g)(x)+e^{g(x)}=2012x+2015$.
α) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1
β) Να λύσετε την εξίσωση $g(x+1)-g(x^2+1)=0$

4.28 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ με $(f o f)(x)=(x-2)\,f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να βρείτε την τιμή $f(3)$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\big(x+1-f(|x|-1)\big)-f(x-2)=0$.

4.29 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f o f)(x)-f(x)=-x+2$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να βρείτε την τιμή $f(2)$
γ) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\big(4-f(|x|-1)\big)=2$

4.30 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f o f)(x)-f(x)=2x+2$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να βρείτε την τιμή $f(-1)$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2+x-1)+2(x+1)=f\big(f(x)\big)$

4.31 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f o f)(x)-f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να βρείτε την τιμή $f(0)$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^3+e^x)=f(1)$

4.32 Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x+3\,e^{x-2}$ καθώς και η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(g o f)(x)=8-3\,e^{x-2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1
β) Να βρείτε την τιμή $f(2)$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\,f(|x|-3)+e^x-1)-f(e^x+1)=0$.

4.33 Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις
α) Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση fog είναι 1-1 τότε και η συνάρτηση g είναι 1-1
β) Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f\big(g(x)\big)=2x+e^x$ τότε να λύσετε την $g\left(e^{x^2}-e^{2x}\right)=g(4x-2x^2)$

4.33 Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ καθώς και την συνάρτηση $g(x)=f(x)-2\ln x$, $x>0$
α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα
β) Αν το σημείο $A(1,2)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f, τότε να λύσετε :
β1) την εξίσωση $f(x-1)=2+2\ln(x-1)$
β2) την ανίσωση $\ln(\ln x)^2 < f(\ln x)-2$

4.34 Δίνεται η γνησίως φθίνουσα $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
α) Να δείξετε ότι η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $g(x)=f(x)-x$ είναι γνησίως φθίνουσα.
β) Να λυθεί η εξίσωση
$f(x^2-3x)-f(2x-6)=x^2-5x+6$.

4.35 Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, για τις οποίες ισχύει $(g\circ f)(x)=2x^5+e^{f(x)}+1$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι f είναι 1-1
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x)=f(1-x^3)$.

4.36 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x)=\alpha^x-x$, $0<\alpha<1$
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λύσετε την εξίσωση
$\alpha^{k^2-4}-\alpha^{k-2}=(\kappa^2-4)-(\kappa-2)$

4.37 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x$
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λύσετε την εξίσωση
$\left(e^x+\sqrt{x}\right)^3+e^x=\left(\sqrt{x}+1\right)^3+1$

4.38 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\sqrt{x-1}$
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λύσετε την εξίσωση
$\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt{x^2+7}=6+x-x^2$

4.39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{e^x+1}+\ln x$
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λύσετε τις εξισώσεις :
β1) $\sqrt{e^{x^2}+1}+2\ln x=\sqrt{e+1}$
β2) $\sqrt{e^{4x}+1}+\ln 3+\ln x=3+\ln(\ln 8)$
β3) $\sqrt{x+1}+\ln(\ln x)=f\left(\dfrac{e}{x}\right)$

4.40 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\ln x+x-1$
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λύσετε την εξίσωση
$e^{x^2+1}-e^{2x}=\ln 2x-\ln(x^2+1)-x^2+2x-1$

4.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x-3$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λύσετε την εξίσωση $x^5+x^3+x=3$
γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{5x}+e^{3x}+e^{x}<3$.

4.42 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2-x-\ln x$.
α) Να αποδείξετε ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+\ln 2=0$
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$(x+1)(x-2)=\ln\dfrac{x+3}{x^2+1}$

4.43 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}-\ln x$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln\alpha=\dfrac{1}{e^{\alpha^2}}-\dfrac{1}{e^{\alpha}}$

4.44 Να λύσετε την εξίσωση
$\ln\dfrac{e^x+1}{e^{-x}+1}=7(e^{-x}+1)^3-7(e^x+1)^3$.

4.45 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}+x+1$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$
γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x-1}+x-2>0$

4.46 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln(x+1)$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λυθεί η εξίσωση
$f(e^x+x-1)=0$ στο $A=[0,+\infty)$.

4.47 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x+1$
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln x^x+x=1$, $x>0$
γ) Να λυθεί η εξίσωση $\ln\dfrac{x^2+1}{3x^2+2}=\dfrac{2x^2+1}{(x^2+1)(3x^2+2)}$

4.48 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3^x+x^3$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λύσετε την εξίσωση
$3^{x^2-4x}-3^{-x+4}=-(x^2-4x)^3+(-x+4)^3$

4.49 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{3-x}-x+2$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λύσετε τις εξισώσεις :
β1) $x-e^{3-x}=2$
β2) $e^{3-x^2+1}-x^2+1=-2$
β3) $e^{-x^2+4x+3}-e^{9-x}+5x=x^2+6$

4.50 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + e^x - 1$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λύσετε τις εξισώσεις :
β1) $f(x) = e$
β2) $f(x^2 - 6x + 8) = 0$
β3) $(x + 3)^3 - (x^2 + 1)^3 = e^{x^2+1} - e^{x+3}$
β4) $\ln^3 x + x = e^{1-x} - (x - 1)^3$

4.51 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λύσετε τις εξισώσεις :
β1) $e^{f(x)} + f(x) = 1$
β2) $(x - 1)^2 = e^{2x} - e^{x^2} + 1$
β3) $f\left(e^{x^2} - 4x\right) = f(e^{4x} - x^2)$
β4) $e^{x^2+2x+2} + (x + 1)^2 = e$
β5) $e^{x^2-3x} + \dfrac{x^2 - 3x}{e^x} = 1$

4.52 Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
με $f(x) - f(y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τότε :
α) Να δείξετε ότι η είναι f 1-1
β) Να λύσετε την εξίσωση
$f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$

4.53 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
με $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y > 0$
Αν η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα τότε :
α) Να δείξετε ότι $f(1) = 0$
β) Να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$
γ) Να δείξετε ότι η είναι f 1-1
δ) Να λύσετε την εξίσωση
$f(x) + f(x^2 + 1) = f(x + 8)$

4.54 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
με $f(x) - f(y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $\forall x, y > 0$
α) Να βρείτε το $f(1)$
β) Να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$, $\forall x > 0$
γ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι
η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα τότε :
γ1) Να δείξετε ότι η είναι f 1-1
γ2) Να λύσετε την εξίσωση
$f(x^2) + f(2) = f(12x - 16)$

4.55 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λύσετε τις εξισώσεις :
β1) $x^x = e^{1-x}, x > 0$
β2) $\dfrac{1}{x^2 + 5} - \dfrac{1}{2x^2 + 1} = \ln\dfrac{x^2 + 5}{2x^2 + 1}$
β3) $f(x) + f(x^2) = f(x^3) + f(x^6)$, $x > 0$

4.56 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \dfrac{2}{x}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να βρείτε τον τύπο της $g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ αν
ισχύει $\ln g(x) - \dfrac{2}{g(x)} = x - \dfrac{2}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$
γ) Να λύσετε την εξίσωση
$\ln\sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + 2}} = \dfrac{1}{2x^2 + 1} - \dfrac{1}{x^2 + 2}$

Γ. Εύρεση Αντίστροφης Συνάρτησης

4.57 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων :
α) $f(x) = 2x + 5$ β) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 1}$

4.58 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων
α) $f(x) = e^{3x-1} + 2$ β) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 2}$

4.59 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων
α) $f(x) = \dfrac{x - 2}{3x + 5}$ β) $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

4.60 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται ,τις αντίστροφες των συναρτήσεων
α) $f(x) = 1 + \ln(x - 3)$ β) $f(x) = 2 + \sqrt{x - 1}$

4.61 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται ,τις αντίστροφες των συναρτήσεων
α) $f(x) = 2e^{x-3} - 1$ β) $f(x) = 2 + \sqrt{e^x - 1}$

4.62 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται ,
τις αντίστροφες των συναρτήσεων
α) $f(x) = 1 - e^{x-1}$ β) $f(x) = 2 - \sqrt{3 - x}$

4.63 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων
α) $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \geq 2$
β) $f(x) = x^2 - 8x + 10$, $x \leq 4$

4.64 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων
α) $f(x) = x^2 + 4x + 1$, $x \geq -2$
β) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \leq -1$

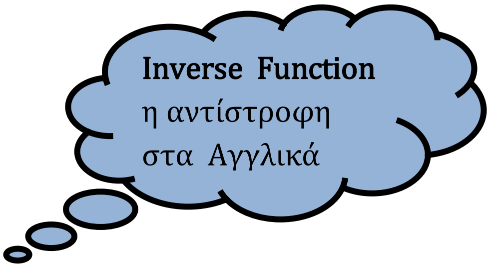
4.65 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων
α) $f(x) = x^3 + 1$ β) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 6$

4.66 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων
α) $f(x) = x^3 + 8$ β) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$

4.67 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων
α) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
β) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$

4.68 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων
α) $f(x) = 8x^3 - 3$ β) $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x}$

4.69 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων
α) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ β) $f(x) = \ln \dfrac{x - 1}{x - 2}$



4.70 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων
α) $f(x) = \ln \dfrac{x}{1 - x}$ **(ΘΕΜΑ 2017)**
β) $f(x) = \dfrac{1 - 2e^x}{e^x + 1}$

4.71 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = e^{-x} + 2$ **(ΘΕΜΑ 2019)**

4.72 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων
α) $f(x) = 3x - 2$ β) $f(x) = x^2 + 1$
γ) $f(x) = (x - 1)(x - 2) + 1$ **(Σχολικό)**

4.73 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων
α) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x}$ β) $f(x) = \ln(1 - x)$
γ) $f(x) = e^{-x} + 1$ **(Σχολικό)**

4.74 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων :
α) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ β) $f(x) = |x - 1|$ **(Σχολικό)**

4.75 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{1 + x}}$

4.76 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων :
α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ β) $f(x) = \ln\left(e - \sqrt{x - e^2}\right)$

4.77 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων :
α) $f(x) = 3 + e^{x-2}$ β) $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$

4.78 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2}$

4.79 Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις αντίστροφες των συναρτήσεων :
α) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ x^2 + 2, & x > 1 \end{cases}$
β) $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - x}, & x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2, & x > 1 \end{cases}$

4.80 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

4.81 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + 1, & x \geq 1 \\ 3x - 1, & x < 1 \end{cases}$

4.82 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f^3(x) + 4f(x) = x + 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε, αν υπάρχει, την αντίστροφη της f.

4.83 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) - 3f^2(x) + f(x) + x = 2017$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε, αν υπάρχει, την αντίστροφη της f.

4.84 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)}+2017f^3(x)+2018=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε, αν υπάρχει, την αντίστροφη της f.

4.85 Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(1,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f^2(x)-2f(x)=e^{2x}-1$.
Να βρείτε :
α) τον τύπο της $f(x)$
β) τον τύπο της $f^{-1}(x)$.

4.86 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=4x+2$, $g(x)=2f^{-1}(x)+1$.
Να βρείτε την g^{-1}.

4.87 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha\neq 0$.
Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν $f(x)=f^{-1}(x)+3$.

4.88 Αν $f(x)=(2\alpha-1)x-3\beta$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f=f^{-1}$

4.89 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha+e^{x-1}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
β) Αν ισχύει $f^{-1}(4)=1$, τότε :
β_1) Να βρείτε το α
β_2) Να βρείτε την αντίστροφη

4.90 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha-x}{1+x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $K(-3,-2)$ τότε
α) Να βρείτε τον αριθμό α
β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη
γ) Να δείξετε ότι $f=f^{-1}$

4.91 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x+\alpha}{1-x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $K(2,-6)$ τότε
α) Να βρείτε τον αριθμό α
β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}
γ) Να βρείτε συνάρτηση g ώστε να ισχύει $(gof)(x)=f^{-1}(x)$.

4.92 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=e^x+1$ και $g(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$
α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη
β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι περιττή
γ) Να βρείτε τη συνάρτηση gof^{-1}

4.93 Να βρείτε την συνάρτηση fog^{-1}
α) $f(x)=\sqrt{x-4}$, $g(x)=1+\sqrt{x}$
β) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $g(x)=\ln(1+e^x)$

4.94 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$
Να ορίσετε την συνάρτηση $f^{-1}og^{-1}$

4.95 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ και $g(x)=2x-1$
α) Να ορίσετε την gof
β) Να βρείτε την $(gof)^{-1}$

Δ. Εξισώσεις-Ανισώσεις και Αντίστροφη

4.96 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να βρείτε το $f^{-1}(-3)$
γ) Να λύσετε την εξίσωση
$f^{-1}(f(x^2-5)+15)=2$

4.97 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2-x-\ln x$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$
γ) Να λύσετε την ανίσωση $x+\ln x>1$

4.98 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-1}+x-3$
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε τις εξισώσεις :
β1) $f^{-1}(x)=0$ β2) $x+1=f^{-1}(0)$
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(\ln x+x-1)>1$

4.99 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(2,6)$ και $B(4,3)$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την εξίσωση
$f(f^{-1}(x^2-5x)+2)=3$
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$f^{-1}(f(x^2-x)-3)<4$.

4.100 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(3,8)$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την εξίσωση
$f^{-1}[3+f(x^2-3x-3)]=3$
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$f\left[2+f^{-1}\left(\frac{2x+10}{x-1}\right)\right]\le 8$.

4.101 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(-1,5)$ και $B(6,4)$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την ανίσωση
$f^{-1}\big(-1+f(x^2-2x-4)\big)<6$

4.102 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(3,8)$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την εξίσωση $f\,(\,f^{-1}\,(x^2)-3\,)=5$

4.103 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(2,1)$ και $B(3,8)$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την εξίσωση
$f\,(-1+f^{-1}\,(x^2+2x)\,)=1$
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(\ln x)+1)<8$

4.104 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(3,2)$ και $B(5,9)$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την εξίσωση $f\big(2+f^{-1}(x^2+x)\big)=9$
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x^2-4x)-6)<2$

4.105 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(2,5)$ και $B(3,2)$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να βρείτε τις τιμές $f^{-1}(5)$ και $f^{-1}(2)$
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$f^{-1}\big(3+f\,(x^2+2x)\big)>2$

4.106 Δίνεται η συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει :
$\big(f(0)\big)^2+\big(f(1)\big)^2+13=6f(0)+4f(1)$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λυθεί η $f(f^{-1}(x^3-3x+4)-1)>3$

4.107 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,-1)$ και $B(4,7)$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε τις εξισώσεις :
β1) $f(f(x))=f(7)$ β2) $f^{-1}(x)=1$
β3) $f\left(\,f^{-1}\left(e^{2x}-2\right)+3\,\right)=7$
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$f\left(f^{-1}\left(x^2-\frac{5}{2}x\right)+3\right)<7$

4.108 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,4)$ και $B(2,12)$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την ανίσωση
$f\big(1+f^{-1}(3x-17)\big)>12$
γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :
$K=f^{-1}\big[24-f\big(5f^{-1}(12)-8f^{-1}(4)\big)\big]$

4.109 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(5,9)$ και $B(2,3)$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη .
β)Να λύσετε την εξίσωση $f\big(3+f^{-1}(x^2+2x)\big)=9$
γ)Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(x-\ln\frac{2}{x}+1\right)=2$
δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^2(x)\le 12\,f(x)-27$
ε) Να λύσετε την ανίσωση $f\,(x+\ln x+4)>9$

4.110 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(3,-1)$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα
β)Να λύσετε την εξίσωση
$f^{-1}\big(-2+f^{-1}(x^2+x+3)\big)=3$
γ) Να λύσετε την ανίσωση $(f(x))^2\le 5+4f(x)$

4.111 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(fof)(x)=3x-5$ με $f(2)=10$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να βρείτε το $f^{-1}(2)$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(|x|-2)-5)=2$

4.112 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{1-x}-x$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(1-x)>x$.

4.113 Δίνεται η $f(x)=-2x^3-3x+1$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την ανίσωση
$f^{-1}(\,f\,(x^2-4)-22)<2$.

4.114 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x + 1$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την εξίσωση
$e^{x^2-x} + (x^2 - x)^3 + x^2 - 2x = e^{x+3} + (x+3)^3 + 3$

4.115 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x - 1$
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$

4.116 Δίνεται η $f(x) = 2e^{-2x} - 3x - 2e^2$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(x - 2e^2) - 1) = 3$
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$f^{-1}(f(x) - 1 - 2e^2) < 0$.

4.117 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 1$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f^{-1}(4\sigma\upsilon\nu x + 2)\right) = 4$
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$f^{-1}(f(x^2 + 2x + 2) - 5) > 0$

4.118 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(fof)(x) + f(x) = 3x - 4$ με $f(3) = 8$
α) Να βρείτε το $f(8)$
β) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
γ) Να βρείτε το $f^{-1}(3)$
δ) Να λύσετε την εξίσωση
$f(f^{-1}(x^2 - 4x) - 3) = 3$.

4.119 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
με $f^3(x) + f(x) = 27x^3 + 8$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln^2 x) = f(2\ln x + 3)$.

4.120 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $A(2, 5)$ για την οποία ισχύει $(fof)(x) + 2f(x) = x + 1$
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
β) Να βρείτε το $f(5)$ και το $f^{-1}(2)$
γ) Να λύσετε την εξίσωση
$f^{-1}\left(4 - f^{-1}(\ln(x - 1))\right) + 2 = 0$.

4.121 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{x-1} + 2x - 3$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(\ln x) < 1$
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(1 + f^{-1}(x + 1)\right) = 0$

4.122 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x) = \ln(x + 1) - e^{-x} + 2x$, $f(A) = \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη .
β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(e^x - 2) < 0$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση
$f^{-1}(x - 1) = x$ στο $(-1, +\infty)$

4.123 Δίνεται γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
$f(e^x + 2) + f(x + 3) = x$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι f η είναι αντιστρέψιμη
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x'x
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(6 - f^{-1}(x^2 - 4)\right) > 0$

4.124 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση τέμνει τους άξονες x'x , y'y
β) Να αποδείξετε ότι f η είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη
γ) Να λύσετε την εξίσωση
$f^{-1}\left(\dfrac{1}{1 - e} + 2 - f(\ln x)\right) = -1$.

4.125 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να βρείτε την $f(1)$
γ) Να λύσετε την $e^{x-4} - e^{2x+1} = x + 5$

4.126 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f\left(\dfrac{e}{x}\right)$
γ) Να βρείτε την αντίστροφη της f
δ) Να λύσετε την ανίσωση
$(x^3 - 8)(e^x - 3) < f(-1)$.

4.127 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$
και $g(x) = 1 - \ln x$
α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη
β) Να βρείτε τη συνάρτηση $(f^{-1}og)(x)$ και να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.
γ) Αν $1 < \alpha < \beta < e$, να δείξετε $\dfrac{1 - \ln\alpha}{1 - \ln\beta} > \dfrac{\ln\alpha}{\ln\beta}$

4.128 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x) = x^3 + \alpha x + 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Η γραφική παράσταση της fof τέμνει τον άξονα y'y στο 14 .
α) Να βρείτε τον αριθμό το α
β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f , $C_{f^{-1}}$
δ) Να λύσετε την εξίσωση
$f(f(x^2-4)+x-1) - f(x+1) = 0$.
ε) Να λύσετε την ανίσωση
$f(f(|x|-2)-5) < f^{-1}(14)$.

4.129 Έστω συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$f(1) + f(e) = 2e + 3$, $f(x) - f(y) = \ln\frac{x}{y} + 2(x-y)$
α) Να βρείτε τα $f(1)$, $f(e)$
β) Να βρείτε τον τύπο της f
γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται
δ) Να λύσετε την ανίσωση
$4(x^2-1) < \ln\frac{x^2+10}{3x^2+8}$

4.130 Δίνεται η $f(x) = e^x + \ln(x+1) + 2$
α)Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
β)Να λύσετε τις ανισώσεις :
β1) $f^{-1}(x) > 0$
β2) $f^{-1}(f(x-4)-5) > f^{-1}(1-f(x-4))$
β3) $f(x) + f^{-1}(x+3) < 3$

4.131 Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2e^x$
α) Να δείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την ανίσωση
$f(x-1) + 2 < f(0) + 2e^{x-1}$
γ) Να λύσετε την εξίσωση
$g\left(\ln\frac{1}{x-1}\right) = g(2e^{x-1} - 2e)$

Ε. Κοινά Σημεία Γραφικών Παραστάσεων f , f^{-1}

4.132 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 1$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη .
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$

4.133 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + 2$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη .
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$

4.134 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη .
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$

4.135 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - x + 12$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη .
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_{f^{-1}}$, $y = x$
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$f^{-1}(f(|x|-1)+8) < 1$.

4.136 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 2$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη .
β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης
Π= $f^{-1}(1) + f^{-1}(10)$
γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ και της ευθείας $y = x$

4.137 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 4x - 4$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη .
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x^2-13) < 2$.

4.138 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + x + 3$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$f^{-1}(f(x^2-3)-4) > 0$.

4.139 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - \frac{e}{x}$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$

4.140 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $2f^3(x) + f(x) = x + 16$, $x \in \mathbb{R}$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να βρείτε την f^{-1}
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f και της ευθείας $y = x$

4.141 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = x - 8$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη
β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f , $C_{f^{-1}}$

4.142 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^3(x)+3f(x)=x+3\,,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη
β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$

4.143 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0\,,+\infty)$ με $f(x)+\ln f(x)=x\ ,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη
β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής των $C_f\,,\,C_{f^{-1}}$

4.144 Δίνεται $f(x)=\dfrac{1}{x}-e^{x-1}+1, x>0$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_{f^{-1}}\,, y=x$

4.145 Δίνεται $f(x)=\ln^3x+2x-1$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f\,,C_{f^{-1}}$

4.146 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $e^{f(x)}+f(x)=x+1\ ,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
β) Να βρείτε την f^{-1}
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$

4.147 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=1$
γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f\,,C_{f^{-1}}$
δ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{f^2(x)-3f(x)}\le 1$

4.148 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-1$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη.
β) Να βρείτε το διάστημα που η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=x$

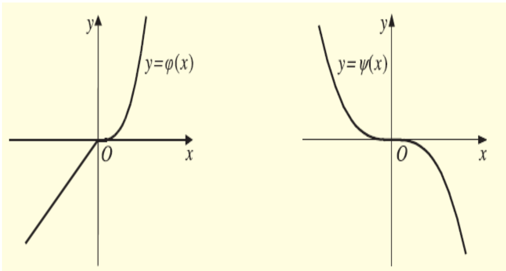
4.149 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3^x+x-9$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη.
β) Να βρείτε το $f^{-1}(-5)$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$
δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(\,f(\ln x)-3)>0$

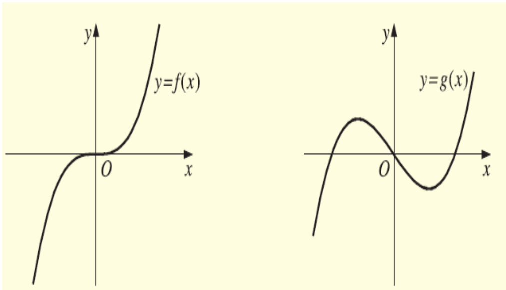
4.150 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-8$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη.
β) Να βρείτε τα $f^{-1}(-6)$ και $f^{-1}(2)$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-8)=-6$
ε) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(\log x^2)\le 2$

4.151 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}+2x-2$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f\,,C_{f^{-1}}$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(2x+1)=x+1$

4.152 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x+\ln x}+x-e^{2-x}$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη.
β) Να λύσετε την εξίσωση $x+xe^{-x}-e^{2-2x}=e^{-x}\ ,\ x>0$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$

4.153 Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f\,,g\,,\varphi\,,\psi$





Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις έχουν αντίστροφη και για καθεμιά από αυτές να χαράξετε την γραφική παράσταση της αντίστροφης. **(Σχολικό)**

4.154 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2019} + 4x + 4$.
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη.
β) Να βρείτε τα $f^{-1}(9)$
γ) Να λύσετε την εξίσωση
$f^{-1}(x^2 - 3x + 11) = 1$
δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, $C_{f^{-1}}$

4.155 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-3} + x - e^2$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη.
β) Να λύσετε τις εξισώσεις:
β1) $f(x) = f^{-1}(x)$
β2) $f^{-1}(2\ln x + 2) = f^{-1}(\ln^2 x - 1)$

4.156 Δίνεται η $f(x) = 1 - \ln\left(\sqrt{x-1} + 1\right)$
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$
δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f και της ευθείας $y = x$

4.157 Δίνεται η $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $x \geq 1$
α) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}
β) Να λύσετε την εξίσωση $(x-1)^2 = \sqrt{x-1}$

4.158 Δίνεται η $f(x) = x^3 + 2x - 2$
α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, $C_{f^{-1}}$
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$f^{-1}\left(e^{2x} - 2e^x + 1\right) < 1$
δ)Να λύσετε την εξίσωση
$f^3(x) + 2f(x) = x + 2$

Ζ. Συνδυαστικές Ασκήσεις

4.159 Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 3\ln x$, $x > 0$.
α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x$.
β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1}$
β1) Να ορίσετε την συνάρτηση $h = fog$
β2) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης h

4.160 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(1 + e^x)$ και $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
α) Να ορίσετε την αντίστροφη της f
β) Να αποδείξετε ότι η g είναι περιττή.
γ) Να βρείτε τον τύπο της $h: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $hof = g$
δ) Αν $x > 0$ να αποδείξετε ότι
$h(e^x) + h\left(e^{2x}\right) < h\left(e^{3x}\right) + h\left(e^{4x}\right)$

4.161 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(3,2)$ και $B(5,9)$
α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε τις εξισώσεις:
β1) $f\left(2 + f^{-1}(x^2 + x)\right) = 9$
β2) $f\left(e^{3-x} - 1\right) - f\left(\ln(x-2)\right) = 0$
γ) Να λύσετε τις ανισώσεις:
γ1) $f(f(x^2 - 4x) - 6) < 2$
γ2) $f\left(2^{2-x}\right) > f(\ln(x+2) + 8)$
δ) Η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση
$(fog)(x-1) \geq f(x) \geq f(g(x) - 1)$, $x \in \mathbb{R}$
Να βρείτε τον τύπο της g.

4.162 Δίνεται η $g(x) = e^x + 2x - 1$
α) Να δείξετε ότι η είναι g αντιστρέψιμη
β) Να δείξετε ότι η C_g τέμνει τον άξονα x'x σε ένα ακριβώς σημείο.
γ) Αν $(gof)(x) = x - 1$ τότε:
γ1) να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
γ2) να λύσετε την εξίσωση
$g(f^{-1}(|x| - 1) - 1) = e^{g(0)} - 1$

4.163 Έστω $f:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(e^x - 1) = x - e^{-x} + 1$, $\forall x > -1$ και τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $(g^2(x) - g(x) + 1)\ln g(x) - x = 0$, $x \in \mathbb{R}$
α) Να βρείτε τον τύπο της f
β) Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(x)} - 1 > 0$
γ) Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη
δ) Να λύσετε την εξίσωση $g\left(f(x)\right) = 1$.

5. Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

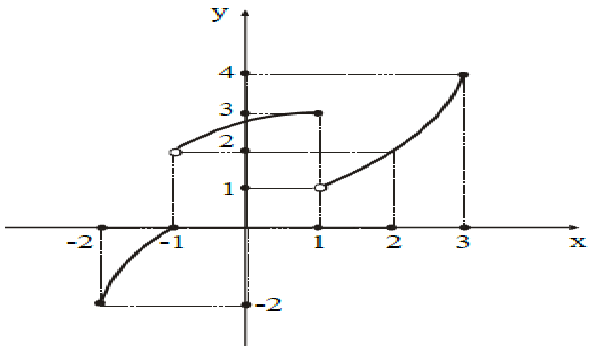
Το Όριο είναι μια έννοια που συναντάται στο πεδίο του Απειροστικού Λογισμού, με την βοήθεια του οποίου ορίστηκαν έννοιες όπως η παράγωγος και το ολοκλήρωμα.
Ο Γερμανός μαθηματικός **Karl Weierstrass** (1815-1897) εισήγαγε τον συμβολισμό $\lim\limits_{x\to x_0}$

5.5 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε :

α) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ γ) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ ε) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

ζ) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ η) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ θ) $f(1)$ ι) $f(-1)$



Α. Έννοια του ορίου

5.1 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lambda(\lambda-1)$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 5\lambda-9$

Να βρεθεί το $\lambda\in\mathbb{R}$ αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

5.2 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lambda^2-3\lambda+2$, $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = 2\lambda-4$

Να βρεθεί το $\lambda\in\mathbb{R}$ αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to3} f(x)$

5.3 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) = \kappa^3+3$, $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = 2\kappa-2\kappa^2$

Να βρεθεί το $\kappa\in\mathbb{R}$ αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$

5.4 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = 2\lambda^3+\lambda^2-5\lambda+8$ και

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lambda^3-2\lambda^2-9\lambda = 4$

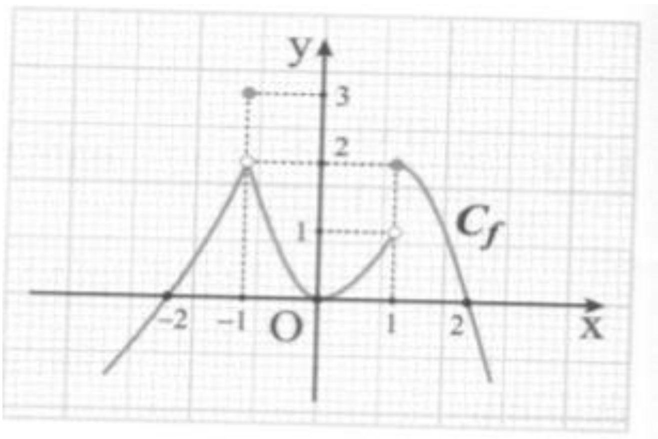
Να βρεθεί το $\lambda\epsilon\mathbb{R}$ αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

5.6 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.
Να βρείτε :

α) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

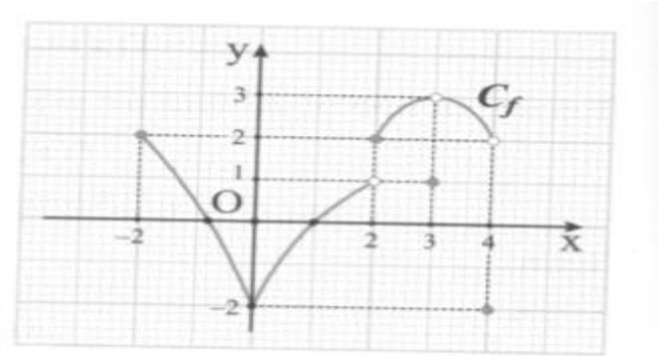
ε) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$



5.7 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.
Να βρείτε :

α) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ γ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ε) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

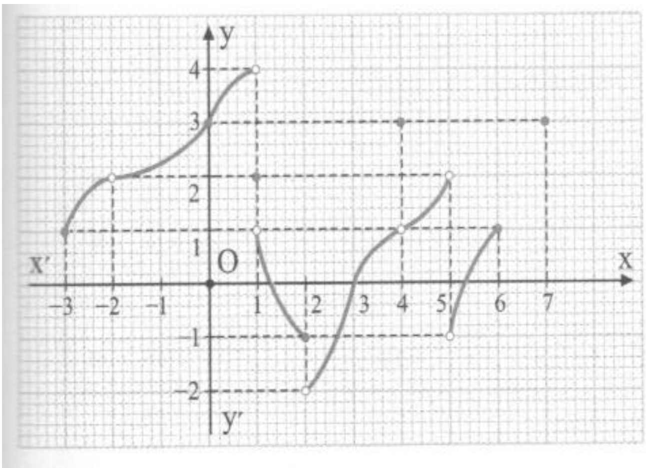


5.8 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.
Να βρείτε :

α) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ γ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ε) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

ζ) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ η) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ θ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ ι) $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$



5.9 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-1}{h}=3$.

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h}$

5.10 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-2}{h}=5$.

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$

5.11 Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=3$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

5.12 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε να έχει νόημα η εύρεση του ορίου $\lim\limits_{x\to\lambda^2-\lambda-3}\dfrac{\sqrt{9-x^2}+1}{e^x+1}$

The limit of f
as x approaches x_0
το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 στα Αγγλικά

2. Όριο Ρητής Συνάρτησης (0/0)

5.13 Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ β) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2+3x}$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$ δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{2x^2-7x+5}$

ε) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+x^2-2x}{x^4-16}$

5.14 Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x^3+1}$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-5x+6}$

γ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-7x-6}{x^2-1}$ δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-2x-1}{4x^2+x-5}$

ε) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{2x^2+7x-4}$

5.15 Να υπολογίσετε τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^3-2x^2}\right)$

β) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2}{x^2-4x+3}\right)$

δ) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2+x-2}-\dfrac{x}{x^3-1}\right)$ ε) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}-x}{x-3+\frac{2}{x}}$

5.16 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)-3f^2(x)+3f(x)=x+9$.

Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f^{-1}(x)}{x^2-5x+6}$

5.17 Δίνεται η $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)-3f^2(x)+3f(x)=x+2$.

Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{\sqrt{x+2}-2}$

5.18 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}2x-1\ , & x<1\\ \dfrac{x^3+3}{4}\ , & x\geq 1\end{cases}$

α) Να βρείτε την αντίστροφη της f

β) Να βρείτε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}$

5.19 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}-1$ και $g(x)=(x-2)^2$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(f\circ g)(x)}{x^2-1}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)-1}{x}$

5.20 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f^3(x)+f(x)=3-x\,,x\in\mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\big(2+f(e^x+5)\big)<0$

δ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^{-1}(x)+15}{x^2-4}$

5.21 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{x}=3$, $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)-3x)=5$.

Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(x)+f^2(x)+5x^2}{x^2f(x)-3x^3+x^2}$

Γ. Όριο Άρρητης Συνάρτησης (0/0)

5.22 Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{2-x}$ β) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+x}$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

5.23 Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{\sqrt{x+7}-3}$ β) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{5-2x}-3}{2x+\sqrt{3x^2+4}}$

5.24 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=2$.

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f^3(x)-8}{4-\sqrt{f^2(x)+12}}$

5.25 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=2$.

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f^2(x)-4}{\sqrt{f(x)+7}-3}$

5.26 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=1$.

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-1}{\sqrt{f^3(x)+3}-2f(x)}$

Δ. Όριο Συνάρτησης Πολλαπλού Τύπου

5.27 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}\ , & x>1\\[2mm] \dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-x}\ , & 0<x<1\end{cases}.$$

Να βρεθεί αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

5.28 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-6x+5}{x-1}\ , & x>1\\[2mm] \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}\ , & 0<x<1\end{cases}.$$

Να βρεθεί αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

5.29 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{x+4}-2}\ , & -4\le x<0\\[2mm] \dfrac{x^3+2x^2-8x}{2x^2-4x}\ , & 0<x<2\\[2mm] \dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}\ , & x>2\end{cases}.$$

Να βρεθούν, αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

5.30 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x+1}-2}\ , & -1\le x<3\\[2mm] \dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^2-5x+6}\ , & 3<x<4\\[2mm] \dfrac{x^3-4x^2+x-4}{16-x^2}\ , & x>4\end{cases}.$$

Να βρεθούν, αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$

5.31 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}2\alpha x^2-\beta x+2\ , & x\le -1\\ -3\alpha x+2\beta+6\ , & x>-1\end{cases}$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=3$

5.32 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}2x^2+\alpha x+\beta\ , & x<2\\ 5\alpha x+2\beta\ , & x\ge 2\end{cases}$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ και η C_f να διέρχεται από το σημείο $A(1,-1)$.

5.33 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}3x-\alpha\ , & x\le -1\\ x^2-\alpha x+\beta\ , & -1\le x<1\\ x^3-\alpha x^2+\gamma\ , & x\ge 1\end{cases}.$$

Να βρείτε τις τιμές των α , β , $\gamma\in\mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

5.34 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2+4\beta x+1\ , & x<0\\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}-\alpha-\dfrac{1}{2}\ , & x>0\end{cases}$$

όπου $\lim\limits_{x\to 8}f(x)=\beta$.Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

Ε. Όριο Συνάρτησης με Απόλυτες Τιμές

5.35 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-3|-|x-1|}{x^2-2x}$ β) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x^3-3x-1|+x}{|x^3+5x+4|-2}$

γ) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x^2-4|-|x^2+5x+6|}{|x^2+3x|+x}$

5.36 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-x|-6}{|x-4|-1}$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-2|-1}{|x|-1}$

5.37 Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$, να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|f(x)+1|+|f(x)-3x|-4}{x-1}$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|f(x)-3x^2|+|f(x)+1|-4}{x-1}$

5.38 Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$, να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}(|f^2(x)-f(x)|-|f(x)|)$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f^2(x)-f(x)|-2}{|f(x)|+1}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\sqrt{f^2(x)}}{x-1}$

5.39 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(-1,+\infty)$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$.

Να βρείτε το : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|f(x)-2|-|f^2(x)-5f(x)|+5}{\sqrt{f(x)+1}-2}$

Ζ. Όριο Συνάρτησης και Διάταξη

5.40 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x f(x)\le x^3+2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

5.41 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x f(x)-2f(x)\le x^2-5x+6$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και το όριο $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

5.42 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x-2)f(x)\leq x^2-7x+10$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και το όριο $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

5.43 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x-1)f(x)\leq x^2+x-2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και το όριο $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

5.44 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x^3-1)f(x)\leq x^3-3x^2+2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και το όριο $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός

α) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

β) Αν κοντά στο 1 είναι $f(x)\neq -1$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|f(x)-1|+f^2(x)+4f(x)+1}{\sqrt{f(x)+2}-1}$

Η. Όριο με χρήσης Βοηθητικής Συνάρτησης

5.45 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)-3x^2+x-2]=-4$

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

5.46 Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ όταν :

α) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+2x^2-x+2]=5$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}=2$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-3x+2}{x-1}=4$

δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}=2$

5.47 Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$ αν ισχύουν :

α) $\lim\limits_{x\to -2}[2f(x)+1-x]=3$ β) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-1}{x+2}=3$

5.48 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-2x+4}{x-3}=10$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-2}{x^2-3x}$

5.49 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-x+6}{x+2}=7$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)+8}{x^2+2x}$

5.50 Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{\eta\mu x}=3$, να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+2x-2}{x}$

5.51 Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5f(x)-1}{f(x)+3}=8$

5.52 Αν για την συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-4}{\sqrt{f(x)}+2}=1$, τότε να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

5.53 Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2-1}=2$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x}{\sqrt{x}-1}$

5.54 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x}{\sqrt{x^2+5}-3}=4$

Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+x-4}{|x-3|-1}$

5.55 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-2x+1}{\sqrt{x^2+9}-5}=1$

Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-x-3}{|x-3|-1}$

5.56 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 2}[xf(x)+x^2-8]=6$.

Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-5f(x)}{\sqrt{f(x)-1}-2}$

5.57 Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}[f(x)\cdot g(x)]$, όταν ισχύουν $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{x+1}=2$ και $\lim\limits_{x\to -1}[g(x)(x^2-x-2)]=-3$

5.58 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-4}{x-1}=3$.

Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-f(x)-12}{x^2+x-2}$

5.59 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2+(x-1)^2}{x-1}=100$.

Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|f(x)-3|-1}{x-1}$

5.60 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=-5$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=3$.

Να βρείτε τα όρια :

α) τα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

β) το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(f(x)-2)(f(2x+1)-1)}{2x^2}$

Θ. Προσδιορισμός Παραμέτρων

5.61 Δίνεται η $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\alpha x-2}{x-1}$. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός

5.62 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2\alpha x+\beta+2}{x^2-1}$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$

5.63 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ , μ ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+\lambda x+\mu}{x^2+3x+2}=5$.

5.64 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\alpha x^2+\beta x-6}{x^2-1}=4$.

5.65 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-\alpha x+2\beta}{x^2-3x+2}=7$.

5.66 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\alpha x}{x-1}=\beta$

5.67 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+\alpha x+\beta}{x-1}=\dfrac{3}{2}$

5.68 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+\alpha x^2+\beta}{x+1}=5$.

5.69 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha x^3+\beta x}{x-1}=2$.

5.70 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\alpha\cdot|x+3|+\beta\cdot|x-5|-3}{x^2-5x+4}=7$.

5.71 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha\cdot|x+2|+\beta\cdot|x-4|-2}{x^2-5x+6}=10$.

5.72 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}, & \text{αν } -3\le x<1\\[2mm] \dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2-3x+2}, & \text{αν } 1<x<2\end{cases}$$

Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

Ι. Κριτήριο Παρεμβολής

Το Κριτήριο Παρεμβολής είναι γνωστό ως **squeeze theorem** ή ως **sandwich rule/theorem** Σε πολλές γλώσσες αναφέρεται και ως το θεώρημα των **«Δύο Αστυνομικών και του ενός μεθυσμένου»**

5.73 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $2x^2-7x+5\le f(x)\le x^2-x-4\,,x\in(2\,,6)$.
Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-2}{x-3}$

5.74 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2+x\le f(x)\le 12\sqrt{x+3}-22$.
Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

5.75 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x)-x+2|\le x^2-2x+1\,,x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

5.76 Δίνεται η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|xf(x)-2f(x)-x^2+4|\le x^2-4x+4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

5.77 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^2(x)-x^2\le 2(f(x)-x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

5.78 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^2(x)\pm 4f(x)\le x^2-4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

5.79 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)\le 2x^2 f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

5.80 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x\le 2f(x),\ x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

5.81 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\dfrac{f^2(x)-6f(x)}{x+3}\le x-3$ για $x>-3$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

5.82 Αν ισχύει $2\sqrt{x+2}\le f(x)\le x+3$, $x\ge -2$, να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-2}{x+1}$ γ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2f^2(x)-8}{x^2+3x+2}$

5.83 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2x-1\le f(x)\le x^2\,,\forall x\in\mathbb{R}$
Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ β) $\lim\limits_{h\to 0} f(1+h)$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|f^2(x)-3|+f(x)-3}{f(x)-1}$

5.84 Δίνονται οι συναρτήσεις $f\,,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν :
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2\,,\ |g(x)-1|\le|f(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(g(x))}{\sqrt{g(x)}-1}$

Κ. Τριγωνομετρικά Όρια

Ο όρος **Τριγωνομετρία** καθιερώθηκε το 1595 από τον Γερμανό Μαθηματικό **Bartholomaeus Pitiscus** Εντούτοις η Τριγωνομετρία αναπτύχθηκε και ήταν μέρος των Μαθηματικών από την Αρχαιότητα.

5.85 Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^2+x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x+4}-2}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}$

5.86 Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\eta\mu x}{2x+3\eta\mu x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\eta\mu x}{2x+\eta\mu 5x}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{\sqrt{7x+9}-3}$

5.87 Να υπολογίσετε τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)$

5.88 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\eta\mu^2 x\le f(x)+2x\,\sigma\upsilon\nu x\le x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\,+\,2x}{x^2}$

5.89 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε
$f^2(x)-2xf(x)\le\eta\mu^2 x-2x\,\eta\mu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

5.90 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|x^2 f(x)-\eta\mu^2 x|\le x^4$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

5.91 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)-2x\cdot\eta\mu x\le 2x\cdot f(x)+\eta\mu^2 x$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

5.92 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda$ και
$f^3(x)+f(x)\eta\mu^2 x=2x^2\,\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε το λ.

5.93 Δίνεται η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda$ και
$f^3(x)+f^2(x)\eta\mu x+x^3 f(x)=2x^2\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το λ

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)+xf(x)+x\,\eta\mu x}{f^2(x)\,+x^2+\eta\mu^2 x}$.

5.94 Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-3}{x}=4$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)-5f(x)+6}{2x+\eta\mu x}$

5.95 Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$, να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(2x)}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)+xf^2(x)}{f^3(x)+x^3}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\sigma\upsilon\nu x-1}{f(x)+\eta\mu x}$

5.96 Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)+f(3x)}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+x^2}{f^2(x)+\eta\mu^2 x}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\sqrt{x+1}-1}{f(x)+\varepsilon\varphi x}$

5.97 Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$, να βρείτε τον $\alpha\ne 0$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(2x)+f(x)\cdot\eta\mu\alpha x}{2x^2-\eta\mu^2 x}=8$

5.98 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^4(x)+2006f(x)=2x+6$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f^{-1}(x)+\eta\mu x+6}{x}$

5.99 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)}{h}=2$.
Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|f^2(x)-1|+f(x)-1}{f(x)}$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu f(x)-\varepsilon\varphi f(x)}{\eta\mu f(x)+\varepsilon\varphi f(x)}$

5.100 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+3f(x)=x+4$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^{-1}(x)}{\eta\mu(x-1)}$

5.101 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=e^{3x+2}$ και $g(x)=\ln x^2$. Να βρείτε το όριο :
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(g\circ f)(x)-\eta\mu^2 x-4}{x}$

6. Μη Πεπερασμένο Όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Α. Εύρεση Ορίου α/0

6.1 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{x^2}$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-7}{|x-2|}$

γ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-1}{x^2-6x+9}$

6.2 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x-1}{4-4x+x^2}$ β) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-5}{|x+1|}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3}{x^3-2x^2}$

6.3 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4+x^3-2x^2}$ β) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-6x+9}}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x^4+x^2}$ δ) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+1}{x^2+4x+4}$

6.4 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-1}{x^3-10x^2+25x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^3}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+1}{x^6+x^2}$

6.5 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+5}{x-4}$ β) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x-7}{x^2-9}$

γ) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+5}{x^2-2x-8}$

6.6 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x+5}{x^2-4}$ β) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x+1}{x^2-25}$

γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x}{x-2}$

Β. Εύρεση Παραμέτρων στην μορφή α/0

6.7 Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2+\lambda x+\lambda+8}=-\infty$$

6.8 Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x}{x^2+\kappa x+4}=-\infty$$

6.9 Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2+1}{x^2+\kappa x+3}=+\infty$$

Γ. Χρήση Βοηθητικής Συνάρτησης στο α/0

6.10 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ώστε να ισχύει

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{f(x)}=+\infty$$

6.11 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ώστε να ισχύει

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x+4}=+\infty$$

6.12 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}[x^2 f(x)]=3$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)\eta\mu x\,\eta\mu 3x]$

6.13 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot f(x)}{\eta\mu x+x}=+\infty$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{f(x)}-1\right)\cdot f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 0} f^2(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{f(x)}-1\right)$

6.14 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ώστε να ισχύει :

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{f(x)}=+\infty$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x+1}=-\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to 2}[\,(3x+1)\cdot f(x)]=+\infty$

6.15 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ώστε να ισχύει :

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{f(x)}=+\infty$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x+2}=-\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}[\,(3x^2-2)\cdot f(x)]=+\infty$ **(Σχολικό)**

Δ. Το Τέχνασμα του Κοινού Παράγοντα

6.16 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\,(f^2(x)-f(x)+1)$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{f^2(x)+1}}{f(x)}$

6.17 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)}$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-3f(x)}{f(x)+2}$

γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4f^3(x)-3f(x)+1}{2f^3(x)+5f^2(x)-6}$

δ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-4f(x)+3}{f^3(x)-2f^2(x)+f(x)-3}$

6.18 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}[\,|x-1|f(x)\,]=1$.
Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{f^2(x)+f(x)+1}$

6.19 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}[\,(x^2-4x+4)f(x)\,]=-8$.
Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3f^2(x)+f(x)+4}{5f^3(x)+1}$

6.20 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=+\infty$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{f(x)}$ β) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f^2(x)-2f(x)}{f(x)+1}$

γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3f^4(x)-2f^2(x)+3}{5f^4(x)-3f(x)+1}$

δ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f^2(x)-2f(x)+8}{f^3(x)+2f^2(x)-4f(x)+1}$

ε) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3f^2(x)-5f(x)+1}}{f(x)+6}$

6.21 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-f(x)+1}{f^2(x)+f(x)+1}$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\,(f^2(x)-f(x)+2)$

δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{f^2(x)+f(x)+1}}{f(x)}$

Ε. Όριο με Απόλυτες Τιμές στο α/0

6.22 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$.

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{|3-x\,f(x)|-|2\,f(x)-3|}$

Ζ. Όριο α/0 και Διάταξη

6.23 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2 f(x)\ge x+3$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\,(f(x)-2010)\,\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right]$

6.24 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x^2-4x+4)\,f(x)\ge x-3$, $\forall x\ne 2$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

6.25 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^3 f(x)\ge x+\eta\mu x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

7. Όριο Συνάρτησης στο Άπειρο

Α. Όριο Πολυωνυμικής Συνάρτησης

7.1 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x^3-2x^2+5x-3)$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^3+5x-1)$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^5+3x^2-1)$

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^2-5x+7)$

7.2 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-x+2)$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^4+4x^2-2017)$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3+2x^2+x-4)$

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^2+x+3)$

7.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^7+2x-3$

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(100)-f(200)\big)\cdot f(x)$

Β. Όριο Ρητής Συνάρτησης

7.4 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^3-5x^2+7x-4}{2x^2-3x+5}$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^5-5x^2+2x-6}{2x^3+5x^2-x-6}$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^6+4x^2-5x-3}{-6x^3+2x^2+7x+4}$

7.5 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+2x^2+3x-5}{2x^3+x+2018}$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^5-x^2+3x-1}{2x^8+5x^2-2x+6}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-5x-3}{x^5+2x^2+3x+1}$

7.6 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x-1}+\dfrac{3x}{x+1}\right)$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{x-2}+\dfrac{x^2}{x+3}\right)$

Γ. Όριο με Απόλυτες Τιμές

7.7 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}|3x^2-5x+6|$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}|2x^3-3x^2+6x-1|$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}|-5x^2+6x-1|$

7.8 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-5x+4|-6x^2}{|x^3-3x^2+5|-x^3}$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^3+4x^2-3x+5|+x^3}{|x^2-2x-3|-x^2}$

7.9 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(|x^3-x^2+2|-|x^3+x^2+4|)$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^5-x^2+1|-|x^5-x|}{x^2+x+1}$

7.10 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}(|x^{2017}-x^2+3x-4|)$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^{2017}-x^3|-x\cdot|x^{2016}-x^2-1|+1}{x-1}$

Δ. Όριο Άρρητης Συνάρτησης

7.11 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+2}$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-5x+2}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{\sqrt{4x^2+7}}$

7.12 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^2+5}}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{16x^2+3}{9x^2-2x+1}}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{4x^2-x-5}$

7.13 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-3x+2}+x)$
β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-2x\right)$
γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-4x+5}-3x\right)$

7.14 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}+x}$
β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{4x^2-2}\right)$
γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+5}{\sqrt{x^2+3}-2x}$

7.15 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+1}\right)$
β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x+1\right)$

7.16 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+3x-1}\right)$
β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+3}-\sqrt{4x^2+x+2}\right)$

7.17 Δίνεται η $f(x)=\sqrt{9x^2+1}-3x$.
Να βρείτε τα όρια
α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+6x)$

Ε. Όριο Εκθετικής Συνάρτησης

7.18 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+3\cdot2^x}{3^x-2^x}$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^{x+1}+5\cdot e^x}{2\cdot3^x-e^x}$
γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\cdot5^{x+2}+5\cdot3^{x+1}}{2\cdot5^{x+1}-3^{x+2}}$ δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5\cdot e^x+2^{2x}}{2\cdot e^{x+1}-2^{2x+3}}$

7.19 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x+3^{x+1}}{3^x+2^x}$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4^{x+1}-3^{x+2}}{2^{2x}+3^x}$
γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+3^{x+1}}{e^{x+2}+3^{x+3}}$ δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}+3^{x+2}-2^x}{e^x+2\cdot3^{x+1}}$

7.20 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2}$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^3-x}$
γ) $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}}$ δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{3x}-4e^{2x}+5e^x-3\right)$

7.21 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{\frac{x^3-5x+3}{x-4}}$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{x^2+5x}{x+2}}$
γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\sqrt{x^2+3}+x}$

7.22 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}4^{\frac{3x^4-x+1}{x+1}-x^2}$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{x^2+x}{x-1}-\frac{4x}{x+1}}$
γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{9x^2+2}}$

7.23 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $e^{f(x)}+f(x)=x\,,\forall x\in\mathbb{R}$
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{x}$

Ζ. Όριο Λογαριθμικής Συνάρτησης

7.24 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2x+3)$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2+3)$
γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x+2)$ δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$

7.25 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to0}(2\ln^2x-3\ln x+5)$ β) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{x^2}$
γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2x-\ln x+5}{2\ln^2x+3\ln x+5}$

7.26 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\eta\mu x}$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{-x})}{x}$

7.27 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8\ln^2x-4\ln x+5}{2\ln^2x+5\ln x-2}$
β) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{9\ln^3x-4\ln^2x+8}{3\ln^2x+5\ln x+7}$ γ) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3\ln x+2}{4\ln^3x+\ln^2x+1}$

7.28 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x^3+2x)-\ln(x^2-1)]$
β) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x+2)-\ln(x^2+3x)]$

7.29 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to-\infty}[2\ln(x^2+1)-\ln(x^2-3x)]$
β) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(3^x+5^x)-x]$

7.30 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x^4+5)-\ln(x^2+3)]$
β) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^x+2)-3x]$

7.31 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}[3\ln x-\ln(2x^2-x+1)]$
β) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^x+2)-\ln(2e^x+1)]$
γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}[2x-\ln(e^{2x}+e^x+1)]$

7.32 Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln x-\sqrt{x^2+2x+3}]$
β) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^{x+2}+3)-x-2]$

7.33 Δίνεται η $f(x)=\ln(2^x-4^x)-e^{\frac{2-x^3}{x^2+x}}$
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

7.34 Δίνεται η $f(x)=\log\dfrac{x^2-1}{x^2}$
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
β) Να δείξετε ότι $f(x)<\log(2x-2)$, $x>1$
γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\log(2x-2]$

Η. Τριγωνομετρικά Όρια στο Άπειρο

7.35 Να βρεθούν τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2\eta\mu x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\,\eta\mu x}{x^2+3}$
γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2\eta\mu x}{x+\eta\mu x}$

7.36 Να βρεθούν τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\eta\mu x}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-3\,\eta\mu x}{5x+3}$
γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+3\,\eta\mu x}{5x-3\,\sigma\upsilon\nu x}$
δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\,\eta\mu x}{x^2-5x+3}$ ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}[(\sqrt{x^2+2}-x)\eta\mu 4x]$

7.37 Να βρεθούν τα όρια
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\,\eta\mu\frac{1}{x}}{2x+3}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+4x-3}{x+2}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$
γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\sqrt{4x^2+2}-\sqrt{x^2+x})\eta\mu\dfrac{1}{x}\right]$

7.38 Να βρεθούν τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{\frac{2x-3\,\eta\mu x}{2x+\sigma\upsilon\nu x}}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x^2+\sigma\upsilon\nu x)-\ln x]$

7.39 Να βρεθούν τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{x+\eta\mu x}{x-\sigma\upsilon\nu x}}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x+\eta\mu x)-2\ln x]$

7.40 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$.
Να βρεθούν τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}$
γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{f(x)}\right)$
δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f^2(x)\cdot\left(1-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{f(x)}\right)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}$

7.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.
Να βρεθούν τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}$
γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\eta\mu f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right)$

7.42 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+3f(x)=x+4$, $\forall x\in\mathbb{R}$
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(2^{x^2+4x}\right)<3$
γ) Να ορίσετε την αντίστροφη
δ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)\cdot\eta\mu x}{x^4}$

Θ. Κριτήριο Παρεμβολής στο Άπειρο

7.43 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με :
$6x^3-5x^2+2\le f(x)\le 6x^3+2x^2+4$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+3x-5}$
γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{2x^3-x+25}$
δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^4-2x^3+x}$

7.44 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $|(x^2+1)f(x)-x|\le 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

7.45 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $|f(x)+x| \le e^{-\frac{1}{x^2}}$, $\forall x \ne 0$
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

7.46 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
$|(x^3+1)f(x)-2x^3| \le x^2+1, \forall x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot ημx\right)$

7.47 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $xf(x)\ge x^3+x+1, x>0$
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

7.48 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x)\ge x^4-x+2018, x<0$
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Ι. Με Χρήση Βοηθητικής Συνάρτησης

7.49 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x f(x)-\sqrt{x^2+x+2}}{2x+1}=3$.
Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

7.50 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-ημx}{x+1}=3$.
Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

7.51 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=-2$.
Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x f(x)+x^2+1}{x f(x)-3x^2+2}$

7.52 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-4x]=3$.
Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2f(x)+7x}{x f(x)-4x^2+2x+1}$

Κ. Προσδιορισμός Παραμέτρων

7.53 Να βρείτε τις τιμές των $α, β\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-2}+αx+β\right)=5$

7.54 Να βρείτε τις τιμές των $α, β\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3+1}{x^2+2}-αx-β\right)=0$

7.55 Δίνεται η $f(x)=\frac{αx^2+5βx+4}{x+1}$ Να βρείτε τις τιμές των $α, β\in\mathbb{R}$ ώστε : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$

7.56 Να βρείτε το $λ\in\mathbb{R}$, ώστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-λx\right)$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$
(Σχολικό)

7.57 Να βρείτε το $α\in\mathbb{R}$, ώστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-αx\right)$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$

7.58 Να βρείτε τις τιμές των $α, β\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+αx+10}+βx\right)=3$

7.59 Να βρείτε τις τιμές των $α, β\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x-5}+αx+β\right)=-5$

7.60 Να βρείτε τις τιμές των $α, β\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}+αx+β\right)=2$

7.61 Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-xf(1)+f(2)\right)=7$
Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f

7.62 Έστω η συνάρτηση $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=3.$
Να βρείτε το $λ\in\mathbb{R}^*$ ώστε να ισχύει
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2f(x)+λx-1}{x f(x)-2x^2+1}=1$

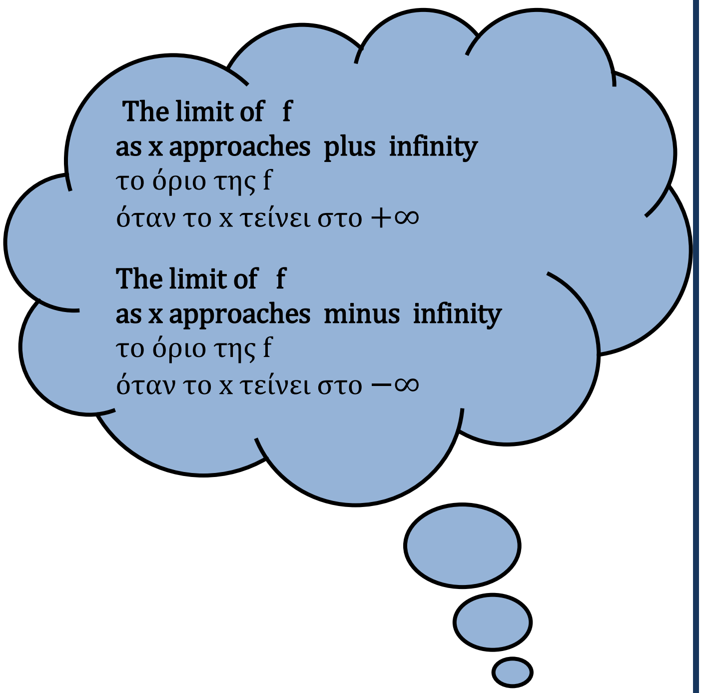
7.63 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x)=\ln[(α-1)x^2+x+2]-\ln(x+1)$
με $α\ge 1$ και $x>-1$. Να βρείτε την τιμή του α ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

7.64 Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$,
να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}[(\alpha-2)x^3+(1-\alpha)x^2-2x+3]$
β) $\lim\limits_{x\to+\infty}[(\alpha-1)x^3-2\alpha x^2+3x-1]$

7.65 Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$
να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\alpha-2)x^2+2x+3}{\alpha x+1}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-1)x^2-2x+1}{2\alpha x+1}$

7.66 Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$
να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2\alpha+3)x^3-3x+1}{(\alpha-2)x^2+2}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-\alpha)x^3+x^2+3}{\alpha x^2-3x+5}$

7.67 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\alpha\cdot x,\ x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ για τις
διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$



7.68 Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\mu \in \mathbb{R}$
να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right)$
β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}$ **(Σχολικό)**

7.69 Δίνεται η $f(x)=\dfrac{\alpha^{x+3}-3^x+5}{\alpha^x+3^x-8}$, $\alpha>0$.
Να βρείτε τις τιμές του α
αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=64$

7.70 Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^{\frac{2x^5+1}{x^3-2x+5}}$ για τις
διάφορες τιμές του $\alpha>0$, $\alpha\neq1$

7.71 Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου
$\alpha>0, \alpha\neq1$, να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha^x+5^x}{2\alpha^x-5^x}$

7.72 Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου
$\alpha>0, \alpha\neq1$, να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha^{x+2}+4^x}{\alpha^x+4^{x+1}}$

8. Κανόνας του De L' Hospital

Α. Απροσδιόριστη Μορφή $0/0$, ∞/∞

8.1 Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+5\,\eta\mu x}{2x-\eta\mu x}$ δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-e^{x-1}}{x-\ln x-1}$

8.2 Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\ln x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$ δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-x}{x^2}$

8.3 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^x}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{e^{\frac{1}{x}}}$ δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+\ln x}{x^2+2\ln x}$

8.4 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{e^x}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{2x}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+x+1}$ δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$

8.5 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{\ln(x+1)}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\, x^2}{x^4}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu\, x}$ **(Σχολικό)**

Β. Απροσδιόριστη Μορφή $0\cdot(\pm\infty)$

8.6 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x\,e^x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)$

8.7 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cdot\ln x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x}\cdot\ln x)$

8.8 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot e^{-x})$ β) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[(x-1)\cdot\ln\dfrac{1}{x-1}\right]$

8.9 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{1-2x}(x^2-5x+2)\right]$

8.10 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}[e^x\cdot(2-x^2)]$ β) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x^2)$

8.11 Δίνεται η $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2\eta\mu x-x$

α) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}[(f(x)-f(2x)\cdot\ln x)]$

(ΘΕΜΑ 2018Ε)

Γ. Απροσδιόριστη Μορφή $(\infty-\infty)$

8.12 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x)$

8.13 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-5\ln x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2e^x)$

8.14 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-\ln x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x-e^x)$

8.15 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(1+x)-x)$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-e^{-x})$

8.16 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\ln(1+x)\right)$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-e^{x+1}\right)$

8.17 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\eta\mu x}\right)$

8.18 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{x}\right)$

Δ. Απροσδιόριστη Μορφή 0^0, $1^{\pm\infty}$, $\pm\infty^0$

Guillaume Francois Antoine
μαρκήσιος του de L' Hospital
(1661-1704)
Γάλλος Μαθηματικός

8.19 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)^{\ln x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x - 1)^x$

γ) $\lim\limits_{x\to 1^-} x^{\frac{1}{1-x}}$

8.20 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0} x^{2x}$ β) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+1)^{\frac{1}{x}}$

8.21 Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+5)^{\frac{1}{x}}$ β) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{3x}}$

9. Συνέχεια Συνάρτησης

Α. Εξέταση Συνέχειας Συνάρτησης

9.1 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}, & x\neq 1\\ -3, & x=1\end{cases}$ είναι συνεχής στο 1

9.2 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x\neq 1\\ 3, & x=1\end{cases}$ είναι συνεχής στο 1

9.3 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^2+3}-2}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$ είναι συνεχής στο 1 .

9.4 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x\,ημ\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ είναι συνεχής στο 0 .

9.5 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & x<1\\ 3x+\ln x, & x\geq 1\end{cases}$ είναι συνεχής .

9.6 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\leq 0\\ \dfrac{ημ^2x}{x}, & x>0\end{cases}$ είναι συνεχής .

9.7 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}3e^{x^2-4}+5, & 0\leq x\leq 2\\ \dfrac{x}{\ln(x-2)}+4x, & x>2\end{cases}$ είναι συνεχής .

9.8 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ημx}{2x}, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x>0\end{cases}$ είναι συνεχής στο 0

9.9 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-5x+2}{x-1}, & x<1\\ 1, & x=1\\ \dfrac{2\sqrt{x^2+3}-4}{x-1}, & x>1\end{cases}$ είναι συνεχής .

9.10 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}, & x>1\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\\ \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x<1\end{cases}$ είναι συνεχής .

9.11 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x\ln x, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$ είναι συνεχής στο 0 . **(ΘΕΜΑ 2008)**

9.12 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ είναι συνεχής στο 0 . **(ΘΕΜΑ 2014)**

9.13 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{\ln x}{x}}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$ είναι συνεχής στο 0 . **(ΘΕΜΑ 2014 Ε)**

9.14 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}+1, & 0<x<1\\ 1, & x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x>1\end{cases}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ **(ΘΕΜΑ 2016 Ε)**

9.15 Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\cdot ημx, & x\in[0,\pi]\end{cases}$ είναι συνεχής στο $[1,\pi]$ **(ΘΕΜΑ 2017)**

Β. Εύρεση Παραμέτρων

9.16 Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 1}{x-1} & , x \neq 1 \\ \alpha , & x = 1 \end{cases}$

9.17 Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} & , x \neq 0 \\ \alpha^2 - 1 , & x = 0 \end{cases}$

9.18 Να βρεθούν τα $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + \beta x - 1}{x-1} & , x \neq 1 \\ 2 , & x = 1 \end{cases}$

9.19 Να βρεθούν τα $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{x^2+5} - 3} & , x \neq 2 \\ 3 , & x = 2 \end{cases}$

9.20 Να βρεθούν τα $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + 2\beta x - 6}{x-2} & , x > 2 \\ \alpha x + 3\beta , & x \leq 2 \end{cases}$

9.21 Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \cdot \eta\mu(x-1)}{x-1} & , x < 1 \\ \alpha^2 + x - 1 , & x \geq 1 \end{cases}$

9.22 Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4} & , 1 \leq x < 2 \\ \frac{3\alpha}{x^3} + 1 , & x \geq 2 \end{cases}$

9.23 Να βρείτε τα $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + 6 , & x < 1 \\ \alpha x + \beta , & 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x-2} - 1} , & x > 3 \end{cases}$$

9.24 Να βρείτε τα $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής με

$$f(x) = \begin{cases} 3\alpha e^x + x , & x \leq -1 \\ 2x^2 - \alpha x + 3\beta , & -1 < x < 0 \\ \beta\eta\mu x + \alpha\sigma\upsilon\nu x + 1 , & x \geq 0 \end{cases}$$

9.25 Να βρεθεί το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} (x-\kappa)(x+\kappa) , & x \leq 2 \\ \kappa x + 5 , & x > 2 \end{cases}$ **(Σχολικό)**

9.26 Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^2 + \beta x - 12 , & x < 1 \\ 5 , & x = 1 \\ \alpha x + \beta , & x > 1 \end{cases}$ να βρείτε τα $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο 1 **(Σχολικό)**

9.27 Να βρείτε τα $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha x + 3\beta}{x-1} , & x > 2 \\ 7 , & x = 2 \\ \frac{x^2 + \beta x - 3\alpha}{x-3} , & x < 2 \end{cases}$$

9.28 Να βρεθεί το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x^2 - 2\ln x} & , x > 0 \\ \kappa , & x = 0 \end{cases}$

(ΘΕΜΑ 2008 Ε)

9.29 Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & , x > 1 \\ x^2 + \alpha , & x \leq 1 \end{cases}$

(ΘΕΜΑ 2018 Ε)

Γ. Συνέχεια – Βοηθητική Συνάρτηση

9.30 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και ισχύει $\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$. Να βρείτε το f(1) .

9.31 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2 και ισχύει $\lim_{x\to 2} \frac{f(x) + 3}{x - 2} = 1$. Να βρείτε το f(2) .

9.32 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και ισχύει $\lim_{x\to 0} \frac{x f(x) - \eta\mu 3x}{x^2 + x} = 2$. Να βρείτε το f(0) .

9.33 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} = 5$. Να βρείτε το f(0) .

9.34 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-5f(x)-16}{\sqrt{x}-3}=5$. Να βρείτε το $f(9)$

9.35 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x - xf(x)}{\eta\mu x + x}=2$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,-3)$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

9.36 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\eta\mu x-2}{x^2+x}=3$

α) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από το $A(0,2)$

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)-1|-1}{x}$

9.37 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο 3 για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+6}}{x-3}=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από το $A(3,3)$

β) Να βρείτε το α, αν $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|f(x)-2|-1}{x-3}=1$

9.38 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο 0 για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+9}}{\eta\mu x}=\dfrac{17}{6}$. Να βρείτε:

α) την τιμή $f(0)$ β) το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{\eta\mu 3x}$

9.39 Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-\sqrt{x^2+9}}{x-4}=2014$

α) Αν η C_f διέρχεται από το $A(4,5)$ να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 4

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$

9.40 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο 1 για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+3}}{x-1}=2$

α) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από το $A(1,2)$

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{f(x)+2}}{f(x)-2}$

Δ. Εύρεση Τιμής Συνάρτησης

9.41 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2 f(x)=\eta\mu x\cdot\eta\mu 3x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.

9.42 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο 0 για την οποία ισχύει $x f(x)=\sigma\upsilon\nu x-1$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$. Να βρείτε το $f(0)$. **(Σχολικό)**

9.43 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x f(x)=\sqrt{x^2+5}+2f(x)-3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(2)$.

9.44 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu x-1\le x^3-xf(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.

9.45 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x f(x)\le x^2+4x+\eta\mu x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.

9.46 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x-2)f(x)\le x^3-6x+4$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(2)$.

9.47 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x-1)f(x)\ge x^2+x-2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.

9.48 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|xg(x)-\eta\mu x|\le x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $g(0)$. **(Σχολικό)**

9.49 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x-2)f(x)=5x^2+3x-26$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(2)$.

9.50 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7f(x)-5}{2f(x)-3}=4$. Να βρείτε το $f(3)$.

Ε. Εύρεση Τύπου Συνάρτησης

9.51 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x f(x)=\eta\mu 3x+\sqrt{x^2+x+1}-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

9.52 Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ στο $x_0=1$, για την οποία ισχύει:
$x f(x)+2=f(x)+\sqrt{x^2+3}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

9.53 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[-5,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x f(x)=\sqrt{x+5}-f(x)-2$, $\forall x\in[-5,+\infty)$. Να βρείτε τον τύπο της f.

9.54 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^3 f(x) = x\left[e^x\left(1-\sqrt{x}\right)+f(x)\right]$ για κάθε $x \geq 0$. Να βρείτε τον τύπο της f

9.55 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,5)$ και είναι τέτοια ώστε :
$(x-1)f(x) = \kappa x^2 + \lambda x - 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$
Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ καθώς και τον τύπο της f

Ζ. Συνέχεια – Κριτήριο Παρεμβολής

9.56 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x)-2| \leq \sqrt{e^x - x - 1}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

9.57 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x)-3x+2| \leq x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

9.58 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

9.59 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + 6f(x) + 9\sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

9.60 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - 4xf(x) \leq -3x^2 - 2x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι f συνεχής στο 1.
β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$

9.61 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^5(x) + f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι f συνεχής στο 0.

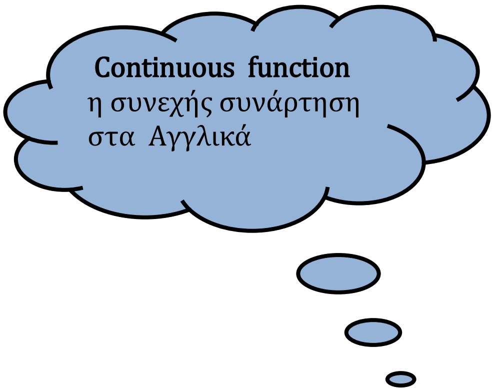
9.62 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι f συνεχής στο 0.

9.63 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^5(x) + f(x) + 1 = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι f συνεχής στο 0

9.64 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x^2 + \eta\mu x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι $|f(x)| \leq x^2 + |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$
β) Να αποδείξετε ότι f συνεχής στο 0

9.65 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x)-f(y)| \leq \alpha \cdot |x-y|$, $\alpha > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$
Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

9.66 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $6x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - 6x + 18$, $\forall x \in \mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 3
β) Θεωρούμε την $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-9}{x-3} , & x \neq 3 \\ \alpha - 3 , & x = 3 \end{cases}$
Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ αν η g είναι συνεχής στο 3.



10. Ασύμπτωτες Συνάρτησης

Α. Κατακόρυφη Ασύμπτωτη

10.1 Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\dfrac{x-5}{|x-2|}$ β) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

10.2 Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$ β) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-7x+10}$

10.3 Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\dfrac{e^x}{1-x}$ β) $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+\ln x}$

10.4 Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\ln x$ β) $f(x)=\ln(x-3)$ γ) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

10.5 Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων(αν υπάρχουν) :

α) $f(x)=\dfrac{1-2\ln(x-1)}{x-1}$ β) $f(x)=x\,\eta\mu\dfrac{2}{x}$

10.6 Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων(αν υπάρχουν) :

α) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ β) $f(x)=\varepsilon\varphi x\,,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

γ) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ δ) $f(x)=\begin{cases} x\,, & x\le 0\\ \dfrac{1}{x}\,, & x>0\end{cases}$

(Σχολικό)

10.7 Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\,, & x\le 0\\ x+\dfrac{1}{x}\,, & x>0\end{cases}$

10.8 Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x}\,, & x\le 0\\ \dfrac{e^x+1}{x}\,, & x>0\end{cases}$

10.9 Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}x^2\,, & x\le 0\\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\eta\mu x}{x}\,, & x>0\end{cases}$

10.10 Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}+1\,, & 0<x<1\\ 1\,, & x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1}\,, & x>1\end{cases}$

(ΘΕΜΑ 2016 Ε)

10.11 Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της $f(x)=-\ln(x-2)$ **(ΘΕΜΑ 2019)**

Β. Οριζόντια Ασύμπτωτη

10.12 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\dfrac{5x^2-3x+4}{x^2+3}$ β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}}{x-3}$

10.13 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+1}$ β) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$

10.14 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\dfrac{5x^2-3x+4}{x^2+3}$ β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}}{x-3}$

10.15 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων(αν υπάρχουν) :

α) $f(x)=\dfrac{x^2+2018}{x^2-3x+2}$ β) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^x+7}$

10.16 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ β) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

(Σχολικό)

10.17 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+7}{x-1}$ β) $f(x) = xe^{-x}$

10.18 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ β) $f(x) = \dfrac{\ln x-1}{\ln x+1}$

10.19 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{5e^x-6}{e^x+3}$

10.20 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των :
α) $f(x) = x \cdot e^x$ β) $f(x) = (x^2-x) \cdot e^x$

10.21 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \ln\dfrac{x-1}{x-2}$ β) $f(x) = 1 + \dfrac{\eta\mu x}{x}$

10.22 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x\eta\mu x + 2015$
Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και να δείξετε ότι η C_f τέμνει την παραπάνω ασύμπτωτη σε άπειρα σημεία.

10.23 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x+1}, & x < -1 \\ \dfrac{1}{x^2+1}, & x \geq -1 \end{cases}$

10.24 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ **(ΘΕΜΑ 2017)**

Γ. Πλάγια Ασύμπτωτη

10.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3x^2-7x+2}{x-3}$.
Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

10.26 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x+1}$ β) $f(x) = \dfrac{2x^3+3x^2-5}{x^2-x+1}$

10.27 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{9x^2+8x+5}$

10.28 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$ β) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x|}$

10.29 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ β) $f(x) = x \cdot \ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$

10.30 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \ln(e^x+1)$

10.31 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = x-1+\dfrac{2}{x-3}$

10.32 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = 3x-5+\dfrac{7}{e^x+x^2}$

10.33 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = 2x-3+\dfrac{\ln x}{x}$

10.34 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = 3x+\dfrac{\eta\mu x}{x}$

10.35 Να εξετάσετε αν έχει πλάγια ασύμπτωτη μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$2x+3 \leq f(x) \leq \dfrac{2x^3+3x^2+1}{x^2}$

10.36 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$ και οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = -x-1$, $\varepsilon_2 : y = x+1$
Να αποδείξετε ότι :
α) Η ε_1 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ ενώ η ε_2 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$
β) Για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2+2x+2 > (x+1)^2 \geq 0$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $-\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $+\infty$ **(Σχολικό)**

Δ. Εύρεση Ασύμπτωτων

10.37 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^2+5x-2}{x-1}$

10.38 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5x + 1}{x + 1}$

10.39 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

10.40 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$

10.41 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες

α) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ β) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}{x - 2}$

10.42 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2x + 5}$

10.43 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x}$

10.44 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες

α) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$ β) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$

γ) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ **(Σχολικό)**

10.45 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες

α) $f(x) = \dfrac{x^2}{2^x}$ β) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ **(Σχολικό)**

10.46 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = x \ln x$

10.47 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $f(x) = \ln(e^x - 1)$

10.48 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = (x + 2) \cdot e^{\frac{1}{x}}$

10.49 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{3x^2}{e^x}$

10.50 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

10.51 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{|x^3 - x|}{x^2}$

10.52 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x^2 + x + 3}, & x > 0 \end{cases}$

10.53 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{e^x}, & x \leq 0 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

10.54 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x^2 + x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ \dfrac{x^3 + 1}{x^2}, & x < 0 \end{cases}$

10.55 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2\ln x$ **(ΘΕΜΑ 2008)**

10.56 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $f(x) = (x - 2)\ln x + x - 3$ **(ΘΕΜΑ 2010)**

10.57 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$
(ΘΕΜΑ 2014)

10.58 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ **(ΘΕΜΑ 2016)**

10.59 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = x - \dfrac{4}{x^2}$ **(ΘΕΜΑ 2018)**

Asymptote
η ασύμπτωτη στα Αγγλικά

Ε. Ασύμπτωτες και Βοηθητική Συνάρτηση

10.60 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}[x\,f(x)-x^2+3x]=4$.
Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

10.61 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\,f(x)-2x^2}{\sqrt{4x^2+x+1}}=-3$.
Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

10.62 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\,f(x)+3x^2}{\sqrt{x^2+1}}=2$.
Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Ζ. Ασύμπτωτες και Κριτήριο Παρεμβολής

10.63 Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$3x+\dfrac{\eta\mu x}{x}\le f(x)\le 3x+\dfrac{1}{x}$, για κάθε $x>0$.
Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f

10.64 Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$2x^2-1\le x\,f(x)\le 2x^2-\eta\mu x$, $x>0$.
Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f

Ζ. Προσδιορισμός Παραμέτρων

10.65 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+1}{x-2}$ να έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=2x+3$

10.66 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+3}{2x+1}$ να έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=3x-1$

10.67 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x}{x-2}$ να έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2x-1$

10.68 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\alpha-1)x^2+(\beta-2)x-2}{x+1}$ να έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=3x-7$

10.69 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\alpha x+\beta)\cdot e^x}{1+e^x}$ να έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=2x-1$

10.70 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\beta x^2-2x-1}{x-3}$ να έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=\alpha x+7$

10.71 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\mu x$, $\mu\in\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y=\lambda$ στο $+\infty$, τότε να δείξετε ότι $\mu=1$, $\lambda=\dfrac{1}{2}$

10.72 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\alpha-1)x^2+\beta x+5}{3x+\gamma}$ να έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-2$ και $y=3$

10.73 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\alpha-1)x^2-\beta x+4}{x-\gamma}$ να έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x=1$ και $y=2$

10.74 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-5x+1}{x-1}-\alpha x-\beta\right)=0$

10.75 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha x-\beta-\sqrt{x^2-x+1}\right)=2$

10.76 Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+\lambda$ να έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=2$ (**ΘΕΜΑ 2019**)

Η. Ασύμπτωτες και Όρια

10.77 Η ευθεία $y=4x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2f(x)-4x^3}{x\,f(x)-2019}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)(x+1)-4x^2}{3x-2019}$

10.78 Η ευθεία $y = 2x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3f(x) - 2x^4 + 4x^3 + 5)$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2f(x) + 3x^3 + 1}{x^3f(x) - 2x^4 + 4x^3 + 5}$

10.79 Η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cdot f(x) + f^2(x)}{x^2 + \eta\mu^2 x}$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\cdot f(x)\right]$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f^2(x) - 2xf(x)\cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}\right]$

10.80 Η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x) - x + 1}{x\,f(x) - 2x^2}$

10.81 Η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6\,x\,f(x) + x\,\eta\mu\,x}{x^2\,f(x) - 2x^3 + 2015}$

10.82 Η ευθεία $y = 4x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x) - 8x + \eta\mu\,x}{f(x) + xf(x) - 4x^2 - 3x + 3}$

10.83 Η ευθεία $y = 2018x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\,f(x) + x^3 + 1}{x^3\,f(x) - 2018x^4 - 5}$

10.84 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 + \dfrac{x^2}{e^x}$

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

β) Να βρείτε τα όρια :

β1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ β2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$

β3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \sqrt{x^2+1}\right)$

10.85 Η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ αν ισχύει

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mu\,f(x) + 4x}{x\,f(x) - 2x^2 + 3x} = 1$

10.86 Η ευθεία $y = 3x - 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ αν ισχύει

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\mu^2-1)f(x) - 5\mu x + 7}{xf(x) - 3x^2 + (\mu+2)x - 3} = 1$

10.87 Η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ αν ισχύει

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lambda f(x) + 2017}{xf(x) - 2x^2 + 7x} = 1$

10.88 Η ευθεία $y = 3x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ αν ισχύει

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\mu-3)f(x) + \sqrt{9x^2 - 16x} + x}{x\,f(x) - 3x^2 + \eta\mu\,4x} = 2$

10.89 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) - g(x) = x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.
Αν η ευθεία $y = 3x - 7$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε :

α) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x) + 3x + \eta\mu\,2x}{x\,f(x) - 3x^2 + 1}$

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

10.90 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) - g(x) = x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.
Αν η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε :

α) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

β) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x) + 2x + \ln x}{x\,f(x) - 2x^2 + \eta\mu\,x}$

11. Θεώρημα BOLZANO

Ο **Bernand Bolzano(1781-1848)** ήταν Βοηθός μαθηματικός, φιλόσοφος και καθολικός ιερέας. Το ομώνυμο θεώρημα το απέδειξε το 1817 .

Α. Τουλάχιστον μια Ρίζα Εξίσωσης

11.1 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5 - 3x = 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,2)$

11.2 Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 5x^2 + 3x = 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

11.3 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $5x^5 = 2e^x - 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

11.4 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = xe^x + x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

11.5 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2^x}{x+1} + \frac{3^x}{x-2} = 2018$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,2)$

11.6 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$ **(Σχολικό)**

11.7 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^{x^2}}{x-2} + \frac{x^2}{x-1} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$

11.8 Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και τέτοιες, ώστε $f(1)\cdot g(2) > 0$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{g(x)}{x-2} + \frac{f(x)}{x-1} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$

11.9 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(3,2)$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,3)$.

11.10 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{4-2x}{x^2-2x+3}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

11.11 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x) = \begin{cases} x+1, & x>0 \\ x^2+3x+1, & x\le 0 \end{cases}$.
Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-1,1]$

11.12 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & -1\le x\le 0 \\ x^3-4x+1, & 0<x\le 1 \end{cases}$.
Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-1,1]$

11.13 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x) = \begin{cases} -x^2+4x-3, & x\le 2 \\ 2x-3, & x>2 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[0,4]$ και να βρείτε το $\xi \in (0,4):\ f(\xi) = 0$

Β. Τουλάχιστον Δύο Ρίζες Εξίσωσης

11.14 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - 20x^3 = 25x^2 + x - 1$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-1,1)$.

11.15 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 = 6x^2 - 1$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-1,1)$.

11.16 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot e^{x^2-4} = 1 - x^2$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-2\,,2)$.

11.17 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-2)(x-3)+4(x-1)(x-3)+7(x-1)(x-2)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(1,3)$

11.18 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3ημx = x - 1$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-π\,,0)$

11.19 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3συνx = x + 2$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-\frac{π}{2}\,,\frac{π}{2})$.

11.20 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-1} + \frac{x^2+1}{x-2} + \frac{ημx+2}{x-3} = 0$ έχει δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες

11.21 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[2\,,6] \to \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-6} = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(2\,,6)$.

11.22 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(4-x)\ln x + 6x^2 = 6x + x^3$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(1\,,6)$

Γ. Μοναδική Ρίζα Εξίσωσης

11.23 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 3x + 1 = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-1\,,0)$.

11.24 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + 5x = 5$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0\,,1)$.

11.25 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3^x + 2x = -1$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-1,2)$.

11.26 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x - e^{e-x} = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1\,,e)$.

11.27 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x + e \cdot x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(\frac{1}{e}\,,1)$

11.28 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $εφx + 4x = 1$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0\,,\frac{π}{4})$

11.29 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $-2\ln x + 3συνx = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0\,,π)$.

11.30 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη για την οποία ισχύει $f^2(2) + f^2(3) - 2f(2) + 4f(3) + 5 = 0$
α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)\,,f(3)$.
β) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

11.31 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα με $f(1) = e$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = xe^x + 2$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0\,,+\infty)$

11.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + 2$ Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(2\,,3)$ **(ΘΕΜΑ 2019)**

Δ. Η C_f Τέμνει τον Άξονα x’x

11.33 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 2$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x’ x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(0\,,1)$.

11.34 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\ln x + x - 2$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
β) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x’x σε ένα μοναδικό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(1\,,e)$.

11.35 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1\,,5]$ ώστε $f^2(α) + f^2(β) + 5 \le 2[f(α) - 2f(β)]$. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x’x σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Ε. Τουλάχιστον ένα κοινό σημείο $C_f\,,C_g$

11.36 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - 2x$ και $g(x) = 15 - 5x$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f\,,g$ τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(2\,,3)$.

11.37 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ και $g(x) = -9x^3 - 3x + 1$.
Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(-1, 1)$

11.38 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(\frac{1}{e}, e)$.

11.39 Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x) = e^{x-1} + x^2 + 1$ και $g(x) = x^2 + 2 - e^{x-1}$
Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(0, 1)$.

11.40 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x^3 - 6x^2$ και $g(x) = 2x^2 - 3x$. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται σε δύο τουλάχιστον σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(0, 2)$

11.41 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$ ώστε να ισχύει $3x^2 \le f(x) + x \le 3x, \forall x \in [0, 1]$.
Να αποδείξετε ότι η C_f και η ευθεία $\varepsilon : 4x - y - 1 = 0$ έχουν ένα τουλάχιστον σημείο τομής στο $(0, 1)$

11.42 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(4, 2)$.
Να αποδείξετε ότι η C_f και η ευθεία $\varepsilon : x - y = 0$ έχουν ένα τουλάχιστον σημείο τομής

11.43 Δίνεται συνεχής $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(5, 2)$.
Να αποδείξετε ότι η C_f και η ευθεία $\varepsilon : y = x$ έχουν ένα τουλάχιστον σημείο τομής

11.44 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1 και ισχύει $f(0) \cdot f(2) < 2f(0)$.
Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1}, έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

11.45 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισχύει
$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 1}{\eta\mu(x-2)} = 16$
α) Να αποδείξετε ότι η C_f και η γραφική παράσταση της $g(x) = x^3 - x - 2$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο
β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 1}{x^2 - 5x + 6}$

Ζ. Bolzano Χωρίς Διάστημα

11.46 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x(e^x + 2) = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα

11.47 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln(x + 2) + \eta\mu(\pi x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα

11.48 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^3 + 3x - 1 = 0$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα.

11.49 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - \frac{1}{x} = 0$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα.

11.50 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x = 3 + \eta\mu x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

11.51 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + 2 = \frac{e}{x}$ έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα.

11.52 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$.
Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο

Η. Θεωρητικές Ασκήσεις στο Bolzano

11.53 Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$: $x_0 \cdot \ln x_0 + \ln x_0 = e$

11.54 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[0,1]$, για τις οποίες ισχύει $f(0) < g(0)$, $f(1) > g(1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$ **(Σχολικό)**

11.55 Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον
$\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \dfrac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3}$

11.56 Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον
$x_0 \in (\alpha, \beta) : \dfrac{f(\alpha)}{3} + \dfrac{f(\beta)}{2} = \dfrac{5}{6} f(x_0)$

11.57 Δίνεται συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής με $f(\alpha) = 2015\beta^2$, $f(\beta) = 2015\alpha^2$.
Να δείξετε ότι $\exists\, x_0 \in (\alpha, \beta) : f(x_0) = 2015\, x_0^2$.

11.58 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 5]$ ώστε $f^2(1) + f^2(5) = 6f(1) - 2f(5) - 10$.
Να δείξετε ότι $\exists x_0 \in (1, 5) : 2f(x_0) = x_0$

11.59 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1,5] \to (1,3)$
Να δείξετε ότι $\exists x_0 \in (1, 3) : f(x_0) = \dfrac{3}{x_0}$

11.60 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$.
Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0, 3)$ και $B(1, 2)$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1) : \dfrac{f(x_0)}{x_0} = 3$

11.61 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $0 < f(x) < 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - 4f(x) + 5x = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$.

11.62 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $0 < f(x) < 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) + 2x = 2f(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 2)$.

11.63 Δίνεται συνεχής $f : [0, 1] \to (-1, 0)$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (0, 1) : f^2(\xi) + f(\xi) + \xi = 0$

11.64 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^2(\alpha) + (f(\beta) - 1) \cdot f(\alpha) + 1 = 0$.
Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο.

11.65 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς, με $f(x) - g(x) = \dfrac{2}{x} - 2x$, $\forall x > 0$.
Αν ρ_1, ρ_2 ρίζες της g με $0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$ τότε να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2)

11.66 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς, για τις οποίες ισχύει
$\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$.
Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία με τετμημένες $\rho_1 < 0 < \rho_2$.
Να αποδείξετε ότι και η C_g τέμνει τον άξονα x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο.

11.67 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο με τεταγμένη -2.
Ισχύει: $4\sqrt{x} - 8 \leq (x - 4)f(x) \leq x - 4$, $\forall x \in [0, 4]$
Να αποδείξετε ότι και η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο.

11.68 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = 4x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

11.69 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) - 2f^2(x) + 3f(x) = 2 - x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(-1, 2)$

11.70 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
$x^2 + x - 2 + \eta\mu(1 - x) \leq (x - 1)f(x) \leq x^2 - 1$
α) Να βρείτε την τιμή $f(1)$
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x + 2)f(x) = 7x + 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

11.71 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\forall x \geq -1$:
$\sqrt{8x + 8} - 4 \leq (x - 1)f(x) \leq \sqrt{2x^2 + 2} - 2$
α) Να βρείτε την τιμή $f(1)$
β) Να δείξετε ότι $\exists\, x_0 \in (-1, 1) : f(x_0) = 2x_0$

11.72 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) + 2 = f(x) + \sqrt{3x^2 + 1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι $\exists\, x_0 \in (0, 1) : 4f(x_0) = 7x_0$.

11.73 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x + 1 \leq f(x) \leq e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^2 x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

11.74 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x+1 \le f(x) \le e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι :
α) η f είναι συνεχής στο 0
β) $\exists x_0 \in (-1,1) : \dfrac{f(x_0)}{2018} = x_0$

11.75 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x+2 \le f(x) < e^{x+2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^3 x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

11.76 Δίνεται η συνεχής $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε $2\ln x - x < f(x) < \ln^2 x + x$, $\forall x > 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = (e^2+1)\ln x - x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,e)$

11.77 Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη και τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(3,2)$.
Θεωρούμε επίσης συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $g(x) = f(2x - f(x)) - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :
α) οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες
β) η εξίσωση $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(2,3)$

11.78 Δίνεται συνεχής f στο $[1,4]$ με $f(1)+f(2) = f(3)+f(4)$, $f(1) \ne f(2)$, $f(3) \ne f(4)$
Να δείξετε ότι :
α) υπάρχει $\xi \in (1,2) : f(\xi) = \dfrac{f(1)+f(2)}{2}$
β) η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται

11.79 Δίνονται οι συνεχείς $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η σύνθεση της g με την f είναι 1-1 και ισχύει η σχέση $f^2(0) + f^2(1) + 4 = 4f(0)$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(f(x) - x) = g(1 - x^2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

11.80 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)+3}{x-1} = 5$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

11.81 Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\beta^2 < 3\gamma$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$. **(ΘΕΜΑ 2001)**

Θ. Θεώρημα Bolzano σε Κλειστό Διάστημα

11.82 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$.
Αν ισχύει $f(0) + f(1) = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[0,1]$.

11.83 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
Αν ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

11.84 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$.
Αν ισχύει $3f(0) + 5f(1) = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[0,1]$.

11.85 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$.
Αν ισχύει $3f(0) + f(1) = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[0,1]$.

11.86 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
Αν ισχύει $7f(\alpha) + 9f(\beta) = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

11.87 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $\alpha,\beta \ne 0$. Αν ισχύει $e^{-\alpha}\cdot f(\alpha) + e^{-\beta}\cdot f(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

11.88 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = \big(f(0) + f(2)\big)\cdot x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[0,2]$.

11.89 Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = g(\alpha) + g(\beta)$ με $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα τουλάχιστον σημείο τομής, στο $[\alpha,\beta]$.

11.90 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
Αν ισχύει $f^2(\alpha) + 2f(\alpha)f(\beta) = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

11.91 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) + f(2) = 7$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x^2 = 4x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο $[1,2]$

11.92 Δίνεται συνεχής $f:[2,3] \to [2,3]$.
Να δείξετε ότι $\exists\ \xi \in [2,3]: f(\xi) = \frac{6}{\xi}$

11.93 Δίνεται συνεχής $f:[0,1] \to [0,3]$.
Να δείξετε ότι $\exists\ \xi \in [0,1]: f(\xi) = \xi^2 + 1$

11.94 Δίνεται συνεχής $f:[0,2] \to [0,1]$.
Να δείξετε ότι $\exists\ \xi \in [0,2]: f^2(\xi) + \xi^2 = 2f(\xi) + 3$

11.95 Δίνεται συνεχής $f:[0,1] \to [0,1]$.
Να δείξετε ότι $\exists\ \xi \in [0,1]: f^2(\xi) + f(\xi) = \xi^2 + \xi$

11.96 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,4] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(0) = f(4)$.
Να δείξετε ότι $\exists\ \xi \in [0,2]: f(\xi) = f(\xi + 2)$

11.97 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f(1) = f(5)$.
Να δείξετε ότι $\exists\ \xi \in [1,3]: f(\xi) = f(\xi + 2)$

11.98 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x^2 - 4x + 2)f(x) \leq f(0) + f(4)$.
Να αποδείξετε ότι
α) $f(0) = f(4)$
β) $\exists\ \xi \in [0,2]: f(\xi^2) = \xi \cdot f(2\xi)$

Ι. Σταθερό Πρόσημο Συνάρτησης

11.99 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς το πρόσημο :
α) $f(x) = (x-2)(x-4)(e^x - 1)$
β) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
γ) $f(x) = e^x - 1 + \ln(x+1)$

11.100 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο $[0, 2019]$ για την οποία ισχύει $f(2019) < f(0) < 0$ και ότι η f είναι 1-1. Να βρείτε το πρόσημο της f.

11.101 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$f(x)(x^3 - \eta\mu x + e^x) \geq e^x - \sigma\upsilon\nu x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε το πρόσημο της f

11.102 Έστω συνάρτηση $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε
$x^2 + 7f^2(x) = 1,\ x \in [-1,1]$.
Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,1)$

11.103 Έστω συνάρτηση $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε
$3(x^2 - 1) + 2f^2(x) = 9,\ x \in [-2,2]$.
Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2,2)$

11.104 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f^2(x) + 7f(x) + 1 \geq x^2 + e^x + 5, \forall x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

11.105 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g στο $\mathbb{R}$ ώστε $g^2(x) + f(x)g(x) \leq -2019$. Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

11.106 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f^3(x) + 2xf(x) = x^4 + x^2 + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

11.107 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν $f(2019) + f(2018) = 0$, $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

11.108 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(1)\,x^5 - 4x^3 + 2x - 1}{f(3)x^2 - 5x + 3}$

11.109 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $x\,f(x) = (x^2 - 4)e^x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(-2,2)$.

11.110 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [1,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ με $x \in [1,5]$ της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $A(2,4)$
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $xf(x) - 25 = f(x) - x^2$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(1,2)$
β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(4)x^5 - e^x - 1)$

11.111 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [-1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ με $x \in [-1,2]$.
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3(1 - f(x)) = x^2 + 2x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(-1,2)$
β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(0)x^5 - 3x^2 + 1}{f(1)x^2 - 2x + 5}$

11.112 Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς στο $\mathbb{R}$ με $f(x) = (x^2 - 5x + 6) \cdot g(x)$ για κάθε $x \in [2,3]$. Αν οι αριθμού 2, 3 είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να δείξετε ότι $g(2) \cdot g(3) \geq 0$

11.113 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και επίσης

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2 f(x)+\eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2+9}-3} = 4$$

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3(1+f(x)) = x^2+3x-1$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0,2)$

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(3)x^5-x^3-3x+e}{(6f(0)+1)x^5-f(1)x+2x-7}$

11.114 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\eta\mu x}{\sqrt{x+1}-1} = 4$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2-x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$

11.115 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f^2(x)+(x+1)f(x)+e^{2x} = 3e^x\cdot f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x+1) = f(0)-x^2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$

11.116 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση τέμνει τους άξονες μόνο στα σημεία $A(0,3)$, $B(2,0)$, $\Gamma(5,0)$. Να αποδείξετε ότι :

α) $f(1)>0$

β) $f(3)\cdot f(4)>0$

γ) $\exists\, x_0\in(1,2) : f(x_0) = f(x_0+1)\cdot f(x_0+2)$

11.117 Έστω οι συνεχείς $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την g περιττή.

Αν $f(x)\neq g(x), \forall x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x)>g(x)$

11.118 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x)\neq x, \forall x\in\mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(3,2)$. Να δείξετε ότι :

α) $f(x)<x, \forall x\in\mathbb{R}$

β) $\exists\, x_0\in(-1,1) : x_0 f(x_0) = 1$

11.119 Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ των οποίων οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν κοινό σημείο το $M(1,2)$. Αν η f δεν έχει ρίζες και η g έχει διαδοχικές ρίζες τους αριθμούς 0 και 3, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(7)x^4+x+\eta\mu x}{g(2)x^2+x+1}$

11.120 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$ με $x\in[0,5]$ της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},1\right)$ και ισχύει ότι $f(2)f(3) = f(4)f(5)$, να δείξετε ότι :

α) $f(x)>0 \quad \forall x\in[0,5]$

β) $\exists x_1\in[2,3]$ και $x_2\in[4,5]$ ώστε να ισχύουν $f^2(x_1) = f(2)f(3)$ και $f^2(x_1) = f(4)f(5)$

γ) η f δεν αντιστρέφεται

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(f(0)+f(1))x^2-2}{e^x+1} = +\infty$

11.121 Δίνεται η $h(x) = x^3+e^x$ και οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

f γνησίως μονότονη

$(gog)(x) = f(0)g^3(x)+f(1)\cdot f(x^3+e^x+2019)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(f(0)-f(1))x^5+x^3+1}{f^2(1)x^2+x+1} = -\infty$

α) Να δείξετε ότι :

α1) η f είναι γνησίως φθίνουσα και η h γνησίως αύξουσα

α2) η συνάρτηση g είναι 1-1

β) Αν η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f(0)x^4+x^2}{f(1)x^2+x+1}+\eta\mu x\right] = +\infty$$

11.122 Έστω συνάρτηση $f:[-3,3]\to\mathbb{R}$ συνεχής ώστε $x^2+f^2(x) = 9$

α) Να βρείτε τις ρίζες τις εξίσωσης $f(x) = 0$

β) Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-3,3)$

γ) Να βρείτε τον τύπο της f

11.123 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν : $f^2(x) = e^x+1$, $f(0) = \sqrt{2}$.

11.124 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν : $f^2(x) = x^2+1$, $f(0) = 1$.

11.125 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $[f(x)+2][f(x)-2] = x^2, f(0) = 2$

11.126 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f ώστε $[f(x)+x][f(x)-x] = x^2+1, f(0) = 4$

11.127 Δίνεται συνεχής $f:[-3,3]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2+f^2(x) = 9, \forall x\in[-3,3]$

α) Να λύσετε την εξίσωση f(x)=0

β) Αν η C_f τέμνει τον άξονα y'y στο $M(0,3)$ να βρείτε τον τύπο της f

11.128 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\frac{f^2(x)-4}{e^x+4}=e^x$ με $f(0)=-3$.
Να βρείτε :
α) τον τύπο της f
β) το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+4^{x+2}}{3^x+4^x}$

11.129 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)-2\,x\,f(x)=5$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Αν η C_f διέρχεται από το $M(2,-1)$
να βρείτε τον τύπο της f.

11.130 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$
για την οποία ισχύει
$f^2(x)-4f(x)\cdot ημx=x^2+4συν^2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Αν η C_f τέμνει τον άξονα y'y στο $M(0,2)$
να βρείτε τον τύπο της f .

11.131 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία $f(x)[f(x)-2x]=e^{2x}-x^2$, $f(0)=-1$.

11.132 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν : $f^2(x)+2xf(x)=e^x$, $f(0)>0$.

11.133 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν : $f^2(x)=4xf(x)+4$, $f(0)=1$.

11.134 Δίνεται συνεχής $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$
με $f^2(x)+xf(x)=4$, $f(3)=-4$. Να βρείτε την f

11.135 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν : $f^2(x)+2f(x)=ημ^2x$, $f(0)=-2$.

11.136 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν : $f^2(x)=2xf(x)+1$, $f(0)=-2$.

11.137 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν : $e^xf^2(x)-\frac{x^2}{e^x}=2f(x)$, $f(0)=0$.

11.138 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν : $e^{f(x)}-\frac{1}{e^{f(x)}}=2x$, $f(0)=0$.

11.139 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $e^{f(x)}-4x-4e^{-f(x)}=0, f(0)=\ln 2$

11.140 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν : $f^2(x)+2f(x)ημx=x^2+συν^2x$,
με $f(0)=1$

11.141 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\ln(f(x)-x)+\ln(f(x)+x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$
α) Να δείξετε ότι $f(0)=1$
β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

11.142 Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f^2(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$

11.143 Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f^2(x)=e^{2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

11.144 Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f^2(x)=x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
(Σχολικό)

11.145 Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
$f^2(x)+2x=x^2+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

11.146 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)-4x=x^2+4$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε την f .

Κ. Σύνολο Τιμών Συνάρτησης

11.147 Να βρεθούν τα σύνολα τιμών
των συναρτήσεων :
α) $f(x)=x^3+5x-1$, $x\in[1,2]$
β) $f(x)=-x^5-3x+2$, $x\in[0,2]$

11.148 βρεθούν τα σύνολα τιμών
των συναρτήσεων :
α) $f(x)=x^3+x-10$, $x\in(-\infty,1]$
β) $f(x)=\ln x+2e^x$, $x\in(0,1]$

11.149 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^{1-x}+\frac{1}{x}$,
$x\in[1,2]$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

11.150 Δίνεται η $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}$.
Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

11.151 Δίνεται η $f(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{2+x}$.
Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

11.152 Να βρείτε το σύνολο τιμών των :
α) $f(x)=x+\ln x$ β) $f(x)=1-x-\ln x$

11.153 Να βρείτε το σύνολο τιμών των :
α) $f(x)=e^{x^3+1}$ β) $f(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}$

11.154 Να βρείτε το σύνολο τιμών των :
α) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$ β) $f(x) = e^{-x} - \ln x$

11.155 Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \ln x \ , \ 0 < x \leq 1 \\ e^{x-1} + \ln x \ , \ \ x > 1 \end{cases}$$
α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

11.156 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)$.
Να βρείτε :
α) το σύνολο τιμών της f
β) τις ασύμπτωτες της C_f

11.157 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής , γνησίως αύξουσα και ισχύει : $x^3 + x^2 + 2 \leq f(x) - x \leq x^3 + 2x^2 + 2$, $\forall x > 0$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

11.158 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - \ln(9-x)$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{x} - \ln(9-x) = e$ έχει ακριβώς μια λύση .

11.159 Δίνεται η $f(x) = 2 - \ln x - e^{x}$, $x \in (0, 1]$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + e^{x} = 2$ έχει ακριβώς μια θετική λύση μικρότερη της μονάδας .

11.160 Δίνεται η $f(x) = \frac{1}{x} - e^x$, $x \in (-\infty, 0)$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2xe^x - x - 2 = 0$ έχει μοναδική αρνητική ρίζα

11.161 Δίνεται η $f(x) = e^{-x} - \ln x - \sqrt{x-1}$.
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
β) Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x'x σε ένα ακριβώς σημείο .

11.162 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sqrt{x} + \ln x$.
Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x'x σε ένα ακριβώς σημείο .

11.163 Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{x}$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο **(Σχολικό)**

11.164 Να δείξετε ότι η εξίσωση $2 + \ln(1 - e^x) = e^x$ έχει ακριβώς μια λύση

11.165 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{2^x} = \ln x$ έχει μοναδική ρίζα

11.166 Να δείξετε ότι η εξίσωση $x - 2 = e^{-x}$ έχει μοναδική θετική ρίζα

11.167 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x - 1$.
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα x_0 ώστε να ισχύει $\ln x_0 + e^{x_0} = 1$.
γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=2016 έχει ακριβώς μια θετική ρίζα.

11.168 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - e^{-x}$.
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln\frac{x}{2018} - e^{-x} = 0$ έχει ακριβώς μια λύση .

11.169 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα x_0 τέτοιο , ώστε $2x_0\ln x_0 = 2 - 3x_0$.

11.170 Δίνεται η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln x - \frac{1}{x}$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς x_0 : ${x_0}^{x_0} = e^{\frac{1}{x_0}}$

11.171 Δίνεται η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\ln x} - x$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 > 1$: ${x_0}^{x_0} = e$

11.172 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x} - e^x$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(\left(2 + \sqrt{1-x}\right)e^{-x} - 1\right) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα

11.173 Δίνεται η $f(x) = \ln x + e^x + x - 1$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
β) Να βρείτε το α ώστε να ισχύει $e^{\alpha^2+4} - e^{4\alpha} = \ln 4\alpha - \ln(\alpha^2 + 4) + 4\alpha - \alpha^2 - 4$

11.174 Δίνεται η $f(x) = \ln x + e^{x-2}$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = e^2(\alpha - \ln x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μια λύση .
γ) Να λυθεί η εξίσωση $e\ln x + e^{x-1} = 1$

11.175 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{2}{x} + \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi > 0$ τέτοιος , ώστε : $\left(\frac{e\cdot\xi+1}{\xi}\right)^{\xi} = e^{e\cdot\xi - 2}$

11.176 Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) + x^2 , & x \geq 2 \\ e^{2-x} - x^3 + 11 , & x < 2 \end{cases}$$
α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2 - f(\alpha)}{x-1} + \frac{3 - f(\beta)}{x-3} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 3)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

11.177 Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x + e^x , & x \leq 0 \\ e^{-x} - \ln(x+1) , & x > 0 \end{cases}$$
α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να δείξετε ότι η f έχει δύο ρίζες ετερόσημες
δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha) - 1}{x-1} + \frac{f(\beta) - 1}{x-2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$
ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

11.178 Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - x , & x \leq 0 \\ \ln(x+1) + 1 , & x > 0 \end{cases}$$
α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x) - 2) = 1$ (1) έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες
δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x) - 4}{x - x_2} + \frac{f(3 - f(x)) - 2}{x - x_1} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2) όπου x_1, x_2 οι ρίζες της (1)
ε) Να δείξετε ότι $f(f^3(x)) \geq f(f^2(x))$

11.179 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\ln x - \frac{1}{x}$
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 .
β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης .

11.180 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x) = \ln(x+2) + \ln(x-2) - 3$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη .

11.181 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(1 - e^x)$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2050$ έχει μοναδική ρίζα
γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης και τον τύπο της
δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} δεν έχουν κοινά σημεία .

11.182 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3^x}{1 + 3^x}$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη .
γ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$

11.183 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + e^{x-3} + 1$.
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$f^{-1}\left(x^5 + e^{x-3} + 245 + \frac{1}{e^3}\right) > 3$
δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f\left(e^{3-x}(x^5 + 10)\right) = \frac{1}{e^4}$

11.184 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + e^{x-2} - 1$.
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$f^{-1}\left(x^3 + e^{x-2} + e^{-1} - 9\right) > 1$
δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f\left(e^{2-x}(x^3 - 8) + 3\right) = 8$

11.185 Δίνεται η $f(x) = e^x - e^{-x} + x^3 + 2x - 1$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$
γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ έχει ακριβώς μια ρίζα
δ) Να λυθεί $f\left(e^{1-x} + 1\right) > f(\ln x + 2x)$

11.186 Δίνεται η $f(x) = x^3 + x - 1$
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
β) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα
γ) Αν είναι γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια :
γ1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$ γ2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\left(f^{-1}(x)\right)^3 + f^{-1}(x) + 2}$

11.187 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και ισχύει : $x^3 + x^2 + 2 \le f(x) - x \le x^3 + 2x^2 + 2$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
β) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα
γ) Αν είναι γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια :
γ1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{f^{-1}(x)}$ γ2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x + f^{-1}(x)}{\left(f^{-1}(x)\right)^4}$

11.188 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x} + 1$
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
β) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα
γ) Αν είναι γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια :
γ1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$ γ2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$

11.189 Δίνεται συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : (1, 2) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
$2\eta\mu(x-1) \le (x-1)f(x) \le x^2 - 1$, $x \in (1, 2)$
και $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x) - 3}{x - 2} = 2$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x) = f(x) - \dfrac{1}{x-1} + 1$
β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $g(x) = \dfrac{1}{f(x) + 1}$ έχει με την ευθεία $y = x - 1$ ένα μόνο κοινό σημείο, με τετμημένη στο $(1, 2)$

11.190 Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \alpha^x - 2\alpha, & x \ge 0 \\ \ln(x+1) - \eta\mu 3x, & -1 < x < 0 \end{cases}$$
α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής
β) Για $\alpha = \dfrac{1}{2}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha^x + 2 = \ln(x+1)$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα

11.191 Δίνεται συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu^2 x - xf(x)}{\sqrt{x+1} - 1} = 4$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(5, 3)$.
α) Να βρείτε το $f(0)$
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
γ) Να δείξετε ότι :
γ1) οι γραφικές παραστάσεις των f και $g(x) = 2$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο
γ2) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 5)$ στο οποίο η f να είναι ίση με τη μέση τιμή των $f(1), f(2), f(3)$

11.192 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, $\left(e^x f(x)\right)^2 + \left(2xe^x\right)^2 = 1 - 4xe^{2x} f(x)$
α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x} - 2x$
β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1 - 2xe^x = 2020e^x$
γ) Να λυθεί $e^{2x - e^{-x}} + 4x < e^{-1} - 2 + 2e^{-x}$
δ) Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x) + 2x + 2^{-x}}{(f(x) + 2x)^2 + e^{-x}}$

Λ. Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών και Θ.Μ.Ε.Τ.

11.193 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [2, 5] \to \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι
$\exists x_0 \in [2, 5] : 10f(x_0) = 7f(3) + 3f(4)$.

11.194 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 3] \to \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι
$\exists \xi \in [0, 3] : f(1) + 2f(2) = 3f(\xi)$.

11.195 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι
$\exists\, x_0 \in [0, 2] : f(x_0) = \dfrac{f(0) + 5f(1) + 4f(2)}{10}$

Intermediate Value Theorem
το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών στα Αγγλικά

11.196 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f\colon [0\,,3] \to \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι $\exists\, x_0 \in [0\,,3]$:
$10 \cdot f(x_0) = f(0) + 2f(1) + 3f(2) + 4f(3)$.

11.197 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f\colon [1\,,3] \to \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι $\exists\, x_0 \in [1\,,3]$:
$f(x_0) = \frac{1}{20}\left[4f\left(\frac{1}{4}\right) + 5f\left(\frac{1}{5}\right) + 11f\left(\frac{1}{11}\right)\right]$

11.198 Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : [1\,,3] \to \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι
$\exists\, x_0 \in (1\,,3) : 3f(x_0) = f(1) + f(2) + f(3)$.

11.199 Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : [1\,,2] \to \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι
$\exists\, x_0 \in (1\,,2) : 4f(x_0) = f(1) + 3f(2)$.

11.200 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f\colon [0\,,3] \to \mathbb{R}$
με $f(x) \neq 0\,, \forall x \in [0\,,3]$ για την οποία ισχύει
$f(x)(x-2) \neq xe^{x-2}\ ,\ \forall x \in [0\,,3]$
Να δείξετε ότι :
α) $f(x) > 0\,, \textit{για κάθε}\ x \in (0\,,3)$
β) $\exists\, x_0 \in (0\,,3) : f(x_0) = \sqrt{f(1)\cdot f(2)}$

11.201 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
για την οποία ισχύει $f\big(f(x)\big) + f(x) = e^x\,, \forall x \in \mathbb{R}$
και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0\,,3)$
α) Να δείξετε ότι $f(3) = -2$
β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f\big(f(0)\big)x^{2018} + 2x + 1}{f(3)x^{2017} - x - 1}$
γ) Να δείξετε ότι για την $g(x) = xf(x) + ημ(πx)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ώστε $g(ξ) = 0$
δ) Να δείξετε ότι
$\exists\, x_0 \in (0\,,4) : 6f(x_0) = 3f(1) + 2f(2) + f(3)$ ί Κα

f(x)

12. Η Έννοια της Παραγώγου

Η έννοια της Παραγώγου σαν μια εφαπτόμενη ευθεία ήταν γνωστή στους Αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες όπως στον **Ευκλείδη** και **Αρχιμήδη**
Η σύγχρονη ανάπτυξη του Διαφορικού Λογισμού πιστώνεται στους **Ισαάκ Νεύτων(1643-1727)** **Γκόντφριντ Λάιμπνιτς(1646-1716)**

Α. Εύρεση Παραγώγου με χρήση Ορισμού

12.1 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} x^2+x\,, & x\le 2 \\ -x^2+9x-8\,, & x>2 \end{cases}$.
Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2

12.2 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1\,, & x<0 \\ x+1\,, & x\ge 0 \end{cases}$.
Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0
(Σχολικό)

12.3 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} x^2+3x\,, & x<0 \\ 2x+\eta\mu x\,, & x\ge 0 \end{cases}$
Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

12.4 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+3}-4\,, & x\ge 1 \\ x^2-x-2\,, & x<1 \end{cases}$.
Να δείξετε ότι :
α) η f είναι συνεχής στο 1
β) η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1

12.5 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x+2|-3x+1$.
Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο -2.

12.6 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x^2-3x|$.
Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1
(Σχολικό)

12.7 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x-1|+2x$.
Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

12.8 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x-2|+2x-2$.
Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 2.

12.9 Δίνεται η $f(x)=x^2+5|x-3|+4x-1$.
Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 2

12.10 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} x\,e^{\frac{1}{x}}\,, & x<0 \\ x-\eta\mu x\,, & x\ge 0 \end{cases}$.
Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

12.11 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} \eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\,, & x\ne 0 \\ 0\,, & x=0 \end{cases}$.
Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

12.12 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\,, & x\ne 0 \\ 0\,, & x=0 \end{cases}$.
Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

12.13 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1-x}\,, & 0<x\ne 1 \\ -1\,, & x=1 \end{cases}$
α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής
β) Να βρείτε το $f'(1)$ **(Σχολικό)**

12.14 Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}x+\lambda\,, & x\le 1 \\ \dfrac{x^2-8x+4}{4x}\,, & x>1 \end{cases}$$
α) Να δείξετε ότι $\lambda=0$ αν f συνεχής στο 1
β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

12.15 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(h+2)=3\cdot\sigma\upsilon\nu h+h^2-h\,,\ \forall h\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε τα $f(2)\,,f'(2)$

12.16 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(h+1)=h^2+4h+3\,,\ \forall h\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε τα $f(1)\,,f'(1)$

12.17 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1+h)=2+3h+3h^2+h^3\,,\ \forall h\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε τα $f(1)\,,f'(1)$ **(Σχολικό)**

12.18 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(h+1)=2\eta\mu h+(h-1)^2$, $\forall h\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε τα $f(1)$, $f'(1)$

Β. Παράγωγος - Κριτήριο Παρεμβολής

12.19 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\eta\mu x-3x^2\le f(x)\le \eta\mu x+5x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

12.20 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\eta\mu^2 x-x^4\le xf(x)\le \eta\mu^2 x+x^4$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε τα $f(0)$, $f'(0)$ **(Σχολικό)**

12.21 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\eta\mu x-x^2\le f(x)\le \eta\mu x+x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

12.22 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu x-x^2\le f(x)+1\le \sigma\upsilon\nu x+x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

12.23 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x)-\eta\mu x|\le\sqrt{x^2+4}-2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ότι $f'(0)=1$

12.24 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x)-\eta\mu 2x|\le\sqrt{x^2+1}-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ότι $f'(0)=2$

12.25 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\left|f(x)-\sqrt{x^2+5}\right|\le(x-2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε το $f'(2)$

12.26 Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x)\le g(x)\le f(x)+(x-e)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Αν για την f ισχύει $f'(e)=3$, να δείξετε ότι $g'(e)=3$

Γ. Παράγωγος και Συνέχεια

12.27 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}\alpha x^3+1, & x\le 1\\ \beta x+3, & x>1\end{cases}$.
Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

12.28 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}2x^2+5\beta, & x\le 1\\ \alpha+\beta\sqrt{x}, & x>1\end{cases}$.
Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

12.29 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x, & x<\pi\\ \alpha x+\beta, & x\ge\pi\end{cases}$
Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο π. **(Σχολικό)**

12.30 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}\alpha+\eta\mu x, & x\le 0\\ \beta x+\sqrt{x^2+4}, & x>0\end{cases}$
Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

12.31 Δίνεται $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x\le 0\\ \alpha\cdot\eta\mu x+\beta\cdot\sigma\upsilon\nu x, & x>0\end{cases}$
Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

12.32 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}x^2+\alpha x+\beta, & x\le -2\\ 3x^2+5x-\alpha, & x>-2\end{cases}$.
Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο -2.

12.33 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}\alpha^2\sqrt{x}, & 0\le x<1\\ \dfrac{x^2+\beta}{4}, & x\ge 1\end{cases}$.
Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

18.34 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta-1, & x<-1\\ (\alpha-1)x^2+2\beta, & x\ge -1\end{cases}$.
Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο -1.

12.35 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\alpha, & x\le 0\\ e^{\beta x}, & x>0\end{cases}$
Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 **(Σχολικό)**

12.36 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot e^x - x + 1\,, & x \le 0 \\ x^2 \cdot \ln x + \beta\,, & x > 0 \end{cases}$
Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

12.37 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0. **(Σχολικό)**

12.38 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha\,, & x \ge 1 \\ e^{x-1} + \beta x\,, & x < 1 \end{cases}$
Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη **(ΘΕΜΑ 2019)**

Δ. Παράγωγος και Όρια

12.39 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0 για την οποία ισχύει $f^3(x) + 8x \cdot \eta\mu x \cdot f(x) = x \cdot \eta\mu^2 3x\,, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε :
α) το $f(0)$ β) το $f'(0)$

12.40 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0 για την οποία ισχύει $f^3(x) + xf^2(x) = x^3 + \eta\mu^3 x\,, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε την $f'(0)$

12.41 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0 για την οποία ισχύει $f(x) \cdot \left(x^2 + f^2(x)\right) = 2x^3\,, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε :
α) το $f(0)$ β) το $f'(0)$

12.42 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$, να βρείτε τα $f(1), f'(1)$.

12.43 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2 και ισχύει $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) + x^2}{x - 2} = 3$, να βρείτε τα $f(2), f'(2)$.

12.44 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 3 και ισχύει $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2-5} - 2} = 2$, να βρείτε το $f'(3)$

12.45 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2 και ισχύει $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - x^2 + 6x}{x - 2} = 6$, να βρείτε το $f'(2)$

12.46 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} = 5$
α) Να βρείτε το $f(0)$
β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.
(ΘΕΜΑ 2000 Ε)

12.47 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 3 και ισχύει $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x) - 6x}{x^2 - 9} = 10$
α) Να βρείτε το $f(3)$
β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3
γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x) - 2x^2}{4x^2 - 12x}$

12.48 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - 2x}{x^2} = 1$
α) Να βρείτε το $f(0)$
β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0
γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) + x\cdot\eta\mu x - 2x}{1 - \sigma\upsilon\nu\, x}$

12.49 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 4 και ισχύει $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{f(x) - \sqrt{x^2-7}}{x - 4} = \dfrac{2}{3}$
α) Να βρείτε το $f(4)$
β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 4
γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{f(x) + \eta\mu(x-4) - 3}{\sqrt{2x+1} - 3}$

12.50 Έστω συνάρτηση f με $f(2) = 2, f'(2) = -1$
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f^3(x) - 8}{x^2 - 4}$

12.51 Έστω συνάρτηση f με $f(1) = 2, f'(1) = -1$
Να βρείτε τα όρια :
α) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f^2(x) - 2f(x)}{x^2 + x - 2}$ β) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 2x}{x^2 - x}$

12.52 Έστω συνάρτηση f με $f(1) = 2, f'(1) = -1$
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f^3(x) - 3f(x) - 2}{x^2 + x - 2}$

12.53 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - x}{x^2} = 2005$
α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$, $f'(0) = 1$
β) Να βρείτε το λ ώστε $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$

12.54 Έστω συνάρτηση f με $f(2) = 3$, $f'(2) = 4$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x^2-2x}$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f^2(x)-9}{x^2-4}$

γ) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)+1-x^2}{x-2}$ δ) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$

12.55 Δίνεται $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x^2-1}$ β) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^2(1+h)-1}{h}$

γ) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)\cdot f(1+h)-1}{h}$ δ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f^2(x)-3f(x)+2}{x^2-3x+2}$

12.56 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(0) = 5$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(0)}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(x)}{x}$

12.57 Έστω συνάρτηση f με $f'(1) = 2$.
Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$

12.58 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής στο 1 με $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-2}{h} = 3$. Να βρείτε :

α) το $f'(1)$ β) το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+x^2-x-2}{x^2-1}$

12.59 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής στο 1 με $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)+3}{h} = 5$. Να βρείτε :

α) το $f'(1)$ β) το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2f(x)+x^2+x+4}{x^2-1}$

Ε. Κανόνες Παραγώγισης

12.60 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x) = e^x + 2x^3 - \ln x$ β) $f(x) = (x^2+1)e^x$

γ) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ δ) $f(x) = \frac{3x^2-2x}{e^x}$

12.61 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x) = x^2\cdot\ln x$ β) $f(x) = (x-4)\cdot\ln x - 5$

γ) $f(x) = x^2\cdot συνx$ δ) $f(x) = x\cdot 2^x$

12.62 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ β) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ γ) $f(x) = \frac{ημx}{x}$

δ) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

12.63 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x) = (5x^2+1)^4$ β) $f(x) = ημ^3x - 3\ln^2x$

γ) $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$

δ) $f(x) = e^{x^2+3x}$ ε) $f(x) = συν(x^2-2x+1)$

ζ) $f(x) = \ln(3x^2-4)$

12.64 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x) = (x-3x^2)^4$ β) $f(x) = e^{x^3}$

γ) $f(x) = -2\ln^2x$ δ) $f(x) = συνe^x$

ε) $f(x) = 4ημ^3x$ ζ) $f(x) = 5^{x^2-2x}$

12.65 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x) = (e^x-x)^3$ β) $f(x) = \sqrt{x-3-\ln x}$

γ) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

12.66 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x) = (x^2+x)^x$ β) $f(x) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x$

γ) $f(x) = x^{\ln x}$ δ) $f(x) = (x^2+3)^{\sqrt{x}}$

12.67 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ β) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

(Σχολικό)

12.68 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ημx, & x\le 0 \\ x^2+x, & x>0 \end{cases}$
Να βρείτε την παράγωγο της f.

12.69 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2-x, & x\le 0 \\ x^3+x, & x>0 \end{cases}$.
Να βρείτε την παράγωγο της f.

12.70 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2+x, & x<1 \\ 3x-1, & x\ge 1 \end{cases}$.
Να βρείτε την παράγωγο της f.

12.71 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x\le 0 \\ συνx, & x>0 \end{cases}$.
Να βρείτε την παράγωγο της f.

12.72 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} 2ημx+συνx, & x\le 0 \\ x^2+2x+1, & x>0 \end{cases}$.
Να βρείτε την παράγωγο της f

12.73 Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+\ln x+1\,, & 0<x<1\\ x+(x-1)^3\,, & x\geq 1\end{cases}.$$
Να βρείτε την παράγωγο της f

12.74 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+|x-2|$.
Να βρείτε την παράγωγο της f.

12.75 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x^2-4x+3|$.
Να βρείτε την παράγωγο της f.

12.76 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot(x^2-2x)$.
Να λύσετε την εξίσωση $f'(x)=0$

12.77 Δίνεται η $f(x)=e^x\cdot(x^2-2x+3)$.
Να λύσετε την ανίσωση $f'(x)>0$

12.78 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x^3$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

12.79 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{e^x}$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

12.80 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
β) Να βρείτε την $(f^{-1})'(1)$

12.81 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
β) Να βρείτε την $(f^{-1})'(3)$

12.82 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x+2$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης
β) Να βρείτε την $(f^{-1})'(1)$

12.83 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x-8$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης
β) Να βρείτε την $(f^{-1})'(4)$

12.84 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^5(x)+3f(x)=x-2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
β) Να βρείτε την $(f^{-1})'(1)$

12.85 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g:
α) $g(x)=f(2x^3+7)$ β) $g(x)=f(-3x)+f\left(\dfrac{4}{x}\right)$
γ) $g(x)=f^3\left(e^{-4x}\right)$

12.86 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g:
α) $g(x)=f(x^2+3x+1)$ β) $g(x)=x^2\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)$
γ) $g(x)=f^2(e^x-x)$

12.87 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $f(x^2)+x\cdot f(x)=4x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε τις τιμές $f(1), f'(1)$

12.88 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu^2 x$.
Να δείξετε ότι $f''(x)+4f(x)=2$ **(Σχολικό)**

12.89 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.
Να δείξετε ότι $x\cdot f''(x)+2f'(x)=xf(x)\,, x\neq 0$.

12.90 Δίνεται η $f(x)=e^x\cdot(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$.
Να δείξετε ότι $f''(x)-2f'(x)+2f(x)=0$.

12.91 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^{2x}$.
Να δείξετε ότι $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=0$.

12.92 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\cdot\ln x$.
Να δείξετε ότι $2f(x)-x\cdot f'(x)+x^2=0$.

12.93 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\lambda x}$.
Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες ισχύει $2f''(x)-3f(x)=f'(x)$

12.94 Δίνεται η $f(x)=e^x(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$ για την οποία ισχύει $f(0)=-7\,, f'(0)=-5\,, f''(0)=-1$
α) Να δείξετε ότι $\alpha=1\,,\beta=2\,,\gamma=-7$
β) Να λύσετε την ανίσωση $f'(x)>0$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f''(x)+f'(x)=-14e^x$
δ) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{f'(x)}{\sqrt{4-x}-3}$

12.95 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)-1=e^x(e^x+2)$ με $f'(0)=-1$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=e^{-x}-1$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να βρείτε τα όρια

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+4^x}{3^x+4^x} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+4^x}{3^x+4^x}$$

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{f'(x)}-\dfrac{f'(x)}{f(x)}=x$ έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα.

Differentiable function
Παραγωγίσιμη συνάρτηση

Derivative
Παράγωγος στα Αγγλικά

13. Εφαπτόμενες

Α. Με γνωστό το Σημείο Επαφής

13.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-5x$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2,f(2))$.

13.2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\ln x$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

13.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^x$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$.

13.4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-3e^x+1$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

13.5 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2,f(2))$

13.6 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(3,f(3))$.

13.7 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(e,f(e))$.

13.8 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2-5x+4}$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

13.9 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2+1)$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

13.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-16x$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία τομής της με τον άξονα x'x

13.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu 2x+x\sigma\upsilon\nu x$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(\pi,f(\pi))$

13.12 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}3x^2-9, & x<2\\ x^3-5, & x\geq 2\end{cases}$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f :
α) στο σημείο της $A(-1,f(-1))$
β) στο σημείο της $B(2,f(2))$

13.13 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}x^2-x+2, & x\leq -2\\ 2x^2+3x+6, & x>-2\end{cases}$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(-2,f(-2))$.

13.14 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}x^3+4x-6, & x\leq -1\\ x^2+9x-3, & x>-1\end{cases}$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(-1,f(-1))$.

13.15 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}+1, & x\geq 1\\ x^3-x^2+3, & x<1\end{cases}$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

13.16 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $3x-2\leq f(x)\leq 2x^2-5x+6$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2,f(2))$.

13.17 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2+6x\leq f(x)\leq x+\eta\mu 5x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$.

13.18 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)-2x=8x^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$.

13.19 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x-3$
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2,f(2))$

13.20 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(e^{-x})=x^2-2x+4$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

13.21 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x^3)+f(x)=4\ln x+2$, $x>0$.
α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$
β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-x}{x-1}$

13.22 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $e^{f(x)}+(x-2)f(x)=x^2-8$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(3,f(3))$

13.23 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(2)>0$. *Αν ισχύει* $f(f(x))=x^2-3x+4$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2,f(2))$

13.24 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+1$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο με τετμημένη 3.

13.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+3x$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο με τετμημένη 4.

13.26 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία : $2f(x+1)+2f(1-x)=\text{συν}2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x'x η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$

13.27 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2 και ισχύει $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)+x^3-5}{x-2}=7$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2,f(2))$.

13.28 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2x+1}{x-1}=0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

13.29 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-2x+3}{x-2}=0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2,f(2))$.

13.30 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+3}}{x-1}=3$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

13.31 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-3x-2011}{\text{ημ}3x}=0$,να βρείτε:
α) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στοσημείο της $A(0,f(0))$
β) το όριο $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x+1)-2011}{x^2+x}$

13.32 Δίνεται η $f(x)=x^{\ln x}$. Να βρείτε :
α) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(e,f(e))$.
β) το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες.

13.33 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\frac{2}{x}}$. Να βρείτε :
α) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.
β) το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες.

13.34 Δίνεται $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x+\text{συν}x)=e^x+e^{2x}$
Να βρείτε :
α) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.
β) το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες.

13.35 Δίνεται παραγωγίσιμη f στο $(-1,1)$ ώστε να ισχύει $f(\text{ημ}x)=e^x\text{συν}x$, $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(0,f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο **(Σχολικό)**

13.36 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(4)=1$ και $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-3x}{x-1}=2$
α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.
β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y=x+1$ τέμνει την C_f σε σημείο $x_0\in(1,4)$

13.37 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-x$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $x_0\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ να διέρχεται από το $M(1,0)$

13.38 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x + 1$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (-2, 0)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το $M(1, 1)$

13.39 Δίνεται η $f(x) = -x^2 + 3x + e^{-x^2}$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το $M(0, 2)$

13.40 Δίνεται συνεχής συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{ημx}{x}, & x \neq 0 \\ α, & x = 0 \end{cases}$$
α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$
γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Β. Να διέρχεται από Γνωστό Σημείο

13.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 11$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(1, 6)$.

13.42 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(0, -4)$.

13.43 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(3, 5)$.

13.44 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{7 - 2x}{3 - x}$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(3, 0)$.

13.45 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 1$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(0, 2)$.

13.46 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(-2, 2)$.

13.47 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

13.48 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \ln x$
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Γ. Εφαπτομένη με Γνωστή Κλίση

13.49 Δίνεται η $f(x) = x^2 - x$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f η οποία είναι:
α) παράλληλη στην ευθεία $δ: 3x + y + 5 = 0$
β) κάθετες στη διχοτόμο του 1ου τεταρτημορίου
γ) παράλληλη στον άξονα x'x
δ) σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 135°

13.50 Δίνεται η $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f οι οποίες είναι:
α) παράλληλες στην ευθεία $δ: 5x - y + 2 = 0$
β) κάθετες στην ευθεία $ζ: x + y = 0$

13.51 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x\ln x - 2e^2$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $δ: y = 9x + 2018$

13.52 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x + 1}$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $δ: x - 4y + 12 = 0$

13.53 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x + x^2$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $δ: 2x - y + 1 = 0$

13.54 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \frac{1 + \ln x}{x}$
Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία $δ: y = 2x$

13.55 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f η οποία είναι παράλληλη προς την διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων.

13.56 Δίνονται οι $f(x)=\frac{1+x^2}{x-1}$, $g(x)=x^2+\frac{5}{2}x$
Να εξετάσετε αν οι εφαπτόμενες στις γραφικές παραστάσεις των f, g στα σημεία με τετμημένη -1 είναι παράλληλες.

13.57 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-7x+3$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f η οποία είναι κάθετη προς την ευθεία $\delta: x-5y+5=0$

13.58 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x-x\cdot \ln x$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f η οποία είναι κάθετη προς την ευθεία $\delta: x+3y+5=0$

13.59 Δίνεται η $f(x)=x^3-3x^2-10x+5$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που σχηματίζουν με τον άξονα x'x γωνία 135°.

13.60 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\ln x$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που σχηματίζουν με τον άξονα x'x γωνία 45°.

13.61 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που σχηματίζουν με τον άξονα x'x γωνία 45°

13.62 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+3$.
Να βρείτε την εξίσωση της οριζόντιας εφαπτόμενης της C_f

13.63 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-12x+2$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που είναι παράλληλες με τον άξονα x'x.

13.64 Δίνεται η $f(x)=e^{x-1}-\frac{3}{2}x^2+2x+1$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $x+y-1=0$

13.65 Δίνεται η συνεχής $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x}, & x>1\\ x^2+1, & x\le 1\end{cases}$
Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων στα σημεία αυτά. **(ΘΕΜΑ 2018Ε)**

Δ. Εύρεση Παραμέτρων στις Εφαπτομένες

13.66 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\alpha x+6$.
Η εφαπτομένη της C_f στο $M(4, f(4))$ είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: 2x+6y-2020=0$. Να βρείτε
α) την τιμή του α
β) τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(3,-1)$

13.67 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$.
Η εφαπτομένη της C_f στο $M(-1,6)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: 5x+y-2020=0$.
Να βρείτε
α) την τιμή των β, γ
β) τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(4,5)$

13.68 Δίνεται η $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+9x-12$.
Η εφαπτομένη της C_f στο $K(2,-10)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y=-3x+5$. Να βρείτε:
α) την τιμή των α, β
β) τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $\delta: 48x-2y+6=0$

13.69 Δίνεται η $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+9x-2$.
Η εφαπτομένη της C_f στο $K(2,-10)$ είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: x-3y+1=0$.
Να βρείτε την τιμή των α, β

13.70 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$.
Η εφαπτομένη της C_f στο $A(2,5)$ έχει εξίσωση $\zeta: y=7x-9$.
Να βρείτε την τιμή των α, β

13.71 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$.
Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ έχει εξίσωση $\zeta: y=2x+6$.
Να βρείτε την τιμή των α, β

13.72 Δίνεται η $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+3$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(2, f(2))$ έχει εξίσωση $\zeta: y=-3x-1$. Να βρείτε:
α) την τιμή των α, β
β) τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $\delta: 12x-2y+2020=0$.

13.73 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(-3, f(-3))$ έχει εξίσωση την $\zeta: y = -4x - 8$. Να βρείτε :
α) την τιμή των α , β
β) τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(-1, -1)$

13.74 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση στο $A(4, f(4))$ έχει εφαπτομένη την ευθεία $y = x - 1$.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{f^2(x) - 9}{\sqrt{x} - 2}$.

13.75 Δίνεται η $f(x) = x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(-1, 6)$ σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα x'x , να βρείτε τα α , β .

13.76 Δίνεται η $f(x) = \alpha x^3 - \beta x^2 + 1$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(-1, 2)$ σχηματίζει γωνία $\frac{3\pi}{4}$ με τον άξονα x'x , να βρείτε τα α , β .

13.77 Δίνεται η $f(x) = x^2 + 2\kappa x + 3\kappa + 4$. Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να εφάπτεται στον άξονα x'x

13.78 Δίνεται η $f(x) = \dfrac{3x^2 + (\alpha-1)x + \beta - 2}{x^2 + x + 2}$
Να βρείτε τα α , β αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η εφαπτόμενη της στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα x'x

13.79 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, 1)$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y = -x + 2$.
Να δείξετε ότι $\alpha = -1, \beta = 2$ **(ΘΕΜΑ 2019)**

Ε. Κοινές Εφαπτομένες

13.80 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}$ στο κοινό τους σημείο $A(1, 1)$, είναι κάθετες **(Σχολικό)**

13.81 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2 - x + 1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο οι εφαπτόμενες είναι κάθετες **(Σχολικό)**

13.82 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^2 - 7x + 7$ και $g(x) = x^2 - 3x + 3$. Να αποδείξετε ότι οι C_f , C_g στο κοινό τους σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη , της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

13.83 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - 3x + 4$ και $g(x) = 3(x^2 - x)$. Να αποδείξετε ότι οι C_f , C_g στο κοινό τους σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη , της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

13.84 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{4}{x}$ και $g(x) = 6 - 2x^2$. Να αποδείξετε ότι οι C_f , C_g στο κοινό τους σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση

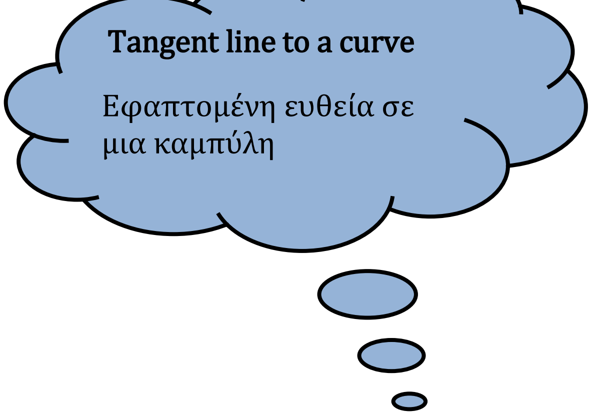
13.85 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -2x^2 + 3x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να αποδείξετε ότι οι C_f , C_g στο κοινό τους σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη , της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

13.86 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3$ και $g(x) = x^2 - \alpha x - \beta$. Να βρείτε τα α , β ώστε οι C_f , C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 1$.

13.87 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - x + \alpha$ και $g(x) = \beta x^2 - 2\alpha x + \beta$. Να βρείτε τα α , β ώστε οι C_f , C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 1$

13.88 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x \cdot \ln x$ και $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + 1$. Να βρείτε τα α , β ώστε οι C_f , C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 1$.

13.89 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ και $g(x) = \alpha x^2 + 2\beta x + 2$. Να βρείτε τα α , β ώστε οι C_f , C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 1$.



14. Ρυθμός Μεταβολής

14.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής :
α) της f ως προς x στο σημείο $x_0 = 1$
β) του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $M(x, f(x))$ ως προς x στο $x_0 = 2$

14.2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$.
α) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής :
α1) της f ως προς x στο σημείο $x_0 = 0$
α2) του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $M(x, f(x))$ ως προς x στο $x_0 = 1$
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x είναι θετικός και για ποιες είναι αρνητικός ;

14.3 Δίνεται η $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + 8x - 9$.
Να βρείτε τον αριθμό α αν ο αριθμός μεταβολής της f ως προς x, όταν $x = 2$ είναι 12 .

14.4 Η θέση $x(t)$ ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω σε άξονα , δίνεται από τη σχέση :
$x(t) = 2t^3 - 12t^2 + 18t - 5$, $t \in [0, 4]$
ο χρόνος σε s . Να βρείτε :
α) την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t = 2$ s
β) ποιες χρονικές στιγμές το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο
γ) σε ποια χρονικά διαστήματα το σημείο κινείται προς τη θετική κατεύθυνση και σε ποια προς την αρνητική
δ) το ολικό διάστημα που διένυσε το σημείο κατά τα πρώτα 4 s

14.5 Η θέση $x(t)$ ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω σε άξονα , δίνεται από τη σχέση :
$x(t) = -t^3 + 12t^2 - 36t$, t ο χρόνος σε s .
Να βρείτε :
α) την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t = 1$ s
β) ποιες χρονικές στιγμές το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο
γ) σε ποια χρονικά διαστήματα το σημείο κινείται προς τη θετική κατεύθυνση και σε ποια προς την αρνητική
δ) το ολικό διάστημα που διένυσε το σημείο κατά τα πρώτα 7 s

14.6 Η θέση $x(t)$ ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω σε άξονα , δίνεται από τη σχέση :
$x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 6$, $t \geq 0$
ο χρόνος σε s . Να βρείτε :
α) την ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 3$ s
β) τη χρονική στιγμή κατά την οποία η ταχύτητα του σημείου είναι -3 m/s
γ) ποιες χρονικές στιγμές το σημείο είναι ακίνητο
δ) την επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t = 2$ s
ε) σε ποια χρονικά διαστήματα το σημείο κινείται προς τη θετική κατεύθυνση και σε ποια προς την αρνητική
στ) το ολικό διάστημα που διένυσε το σημείο κατά τα πρώτα 10 s

14.7 Δίνονται τα σημεία $A(x, 4)$, $B(-1, x + 7)$.
Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων Α και Β ως προς x, όταν $x = 5$.

14.8 Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει περίμετρο 14 cm και η πλευρά του ΑΒ έχει μήκος x cm. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ΑΒΓΔ ως προς x, όταν $x = 5$.

14.9 Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος διπλάσιο του πλάτους του. Αν το εμβαδόν του αυξάνεται με ρυθμό $5\ cm^2/s$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του πλάτους του τη χρονική στιγμή που αυτό ισούται με 6 cm .

14.10 Η ακτίνα ενός κύκλου αυξάνεται με ρυθμό 10 μον/s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του κυκλικού δίσκου τη χρονική στιγμή που η ακτίνα του είναι ίση με 10 μον.

14.11 Το εμβαδόν ενός κύκλου μειώνεται με ρυθμό $4\pi\ cm^2/s$. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μήκος του κύκλου είναι 3 cm , να βρείτε τον ρυθμό :
α) με τον οποίο μεταβάλλεται η ακτίνα
β) της περιμέτρου του κύκλου

14.12 Δίνεται τρίγωνο ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία $O(0, 0)$, $A(2x, 0)$, $B(0, e^x)$, $x > 0$. Αν το x αυξάνει με ρυθμό 2 cm/s , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου , όταν $x = 1$ cm .

14.13 Δίνεται τρίγωνο ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$, $B(0,\ln x)$, $x > 1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/s , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου , όταν $x = e^2$ cm .

14.14 Δίνεται τρίγωνο ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$, $B(0,\ln x)$, $x > 1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/s , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου , όταν $x = 5$ cm . **(Σχολικό)**

14.15 Δίνεται τρίγωνο ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$, $B(0,xe^x)$, $x > 0$. Αν το x αυξάνει με ρυθμό 1 cm/s , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου , όταν $x = \ln 2$ cm .

14.16 Η πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου μεταβάλλεται με ρυθμό 5 cm/s . Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η πλευρά του είναι 20 cm , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου και του εμβαδού.

14.17 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το οποίο η βάση $ΒΓ = 8$ cm, ενώ οι ίσες πλευρές του αυξάνονται με ρυθμό 3 cm/s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου, τη στιγμή που οι ίσες πλευρές του είναι ίσες με 5 cm.

14.18 Το ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με σταθερή βάση ΒΓ=16 cm μεταβάλλεται με ρυθμό 5 cm/s . Αν τη χρονική στιγμή t_0 το σημείο Α απέχει από την πλευρά ΒΓ απόσταση 6 cm , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:
α) των ίσων πλευρών
β) του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ

14.19 Η πλευρά ενός τετραγώνου $α(t)$ σε cm τη χρονική στιγμή $t > 0$ (σε s) ενός τετραγώνου δίνεται από την σχέση $α(t) = t^2 + 2t + 3$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου , τη χρονική στιγμή που η πλευρά του είναι 11 cm.

14.20 Το εμβαδό ενός τετραγώνου αυξάνεται με ρυθμό 24 cm^2/s τη χρονική στιγμή που η πλευρά του είναι 4 cm . Σε αυτή τη χρονική στιγμή , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της διαγωνίου του τετραγώνου

14.21 Το μήκος ενός ορθογωνίου αυξάνεται με ρυθμό 10 cm/min και το πλάτος του ελαττώνεται με ρυθμό 6 cm/min .
Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:
α) του εμβαδού του ορθογωνίου τη χρονική στιγμή t_0 που το μήκος του είναι 4 cm και το πλάτος του είναι 2 cm
β) της διαγωνίου του ορθογωνίου τη στιγμή που το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο εμβαδού 9 cm^2

14.22 Το μήκος ενός ορθογωνίου μειώνεται με ρυθμό 1 cm/s και το πλάτος του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s . Κάποια χρονική στιγμή t_0 το μήκος του είναι 8 cm και το πλάτος του 6 cm.
Τη χρονική στιγμή t_0 , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής :
α) της περιμέτρου του ορθογωνίου
β) του εμβαδού του ορθογωνίου
γ) της διαγωνίου του ορθογωνίου

14.23 Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = 2x^2 + 1$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του ισούται με -1

14.24 Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x \cdot e^x$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 3 cm/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του ισούται με 1

14.25 Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \ln(x^2 + 1)$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του ισούται με 1

14.26 Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης του σημείου Μ από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του ισούται με 0

14.27 Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μον/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A **(Σχολικό)**

14.28 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο M περνάει από το σημείο $(1, 1)$ η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s .
Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής :
α) της τεταγμένης του M τη χρονική στιγμή t_0
β) της απόστασης του M από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή t_0

14.29 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{2}{x}$, $x > 0$. Τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο M περνάει από το σημείο $(2, 1)$ η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/s .
Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής :
α) της τεταγμένης του M τη χρονική στιγμή t_0
β) της απόστασης του M από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή t_0

14.30 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 m/s. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η τετμημένη του M είναι 3 m
Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής :
α) της τεταγμένης του M
β) της απόστασης του M από το σημείο $K(2, 0)$

14.31 Ένα κινητό K κινείται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $y = \frac{x^3 + 2}{6}$
α) Τη χρονική στιγμή που το κινητό βρίσκεται στο σημείο $A(-2, -1)$, η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μον/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του κινητού τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο A .
β) Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού είναι πάντα θετικός .
Να βρείτε σε ποια σημεία της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι οκταπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης .

14.32 Ένα κινητό K ξεκινά από την αρχή των αξόνων O και κινείται κατά μήκος της παραβολής $y = x^2 + 2x$ έτσι, ώστε η τετμημένη του x να αυξάνεται με ρυθμό 2 μον/s . Η προβολή του σημείου K πάνω στον άξονα x'x είναι το σημείο A
α) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAK , όταν το σημείο K έχει τετμημένη ίση με $\frac{1}{2}$.
β) Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του K είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του x ;

14.33 Ένα κινητό ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$.
Να βρείτε σε ποιο σημείο M της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του M είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$, αν υποτεθεί ότι $y'(t) > 0$, $t \geq 0$

14.34 Ένα κινητό ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{1}{4}x^2$, $x \geq 0$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$,αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0, \forall t \geq 0$ **(Σχολικό)**

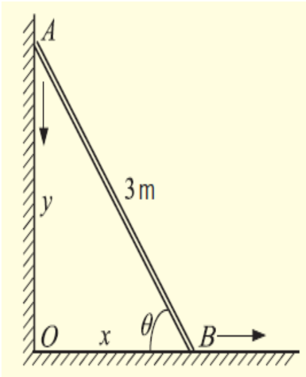
14.35 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x^3 + 17}$, $x \geq 0$. Όταν το σημείο βρίσκεται στην θέση $(2, 5)$, η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του τη στιγμή που το σημείο βρίσκεται στην θέση $(2, 5)$

14.36 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^{x-1} + x$ ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 3 m/min .
Αν τη χρονική στιγμή t_0 η τεταγμένη του είναι ίση με 2 , τότε να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη στιγμή t_0

14.37 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^{x-1} + \ln x$, $y \geq 0$ ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 m/min .
Αν τη χρονική στιγμή t_0 η τεταγμένη του είναι ίση με 1 , τότε να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη στιγμή t_0

14.38 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$ και Α σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων .
α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης
β) Αν ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της C_f και καθώς περνάει από το Α η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 3 μον/s , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη χρονική στιγμή που το Μ περνάει από το Α .

14.39 Μια σκάλα μήκους 3 m είναι τοποθετημένη σε έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1 m/s. Τη χρονική στιγμή t_0 που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5 m , να βρείτε :

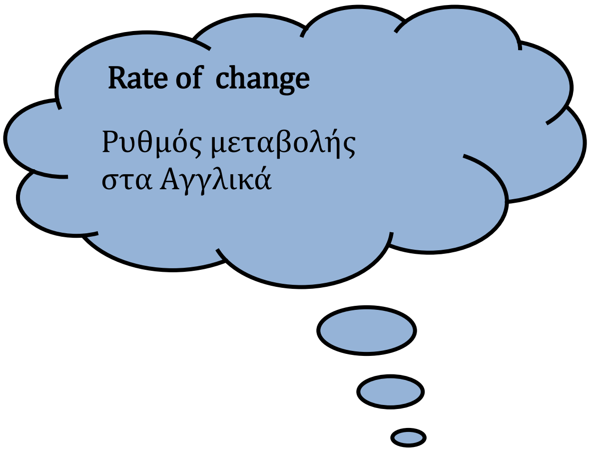


α) το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ
β) την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή Α της σκάλας. **(Σχολικό)**

14.40 Ένα σημείο Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο $A\big(x_0\,, f(x_0)\big)$ με $x_0 < 0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x),\ x \ge x_0$, με $x = x(t), y = y(t),\ t \ge 0$ και f κυρτή συνάρτηση
Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου Μ είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0\,, \forall t \ge 0$. **(ΘΕΜΑ 2014)**

14.41 Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \ge 0$, με $x = x(t), y = y(t)$.
Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$, $\forall t \ge 0$.
(ΘΕΜΑ 2016 Ε)

14.42 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1\,, & x \ge 1 \\ e^{x-1} + x\,, & x < 1 \end{cases}$
Ένα σημείο $M(x\,, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x),\ x \ge 1$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $A(3\,, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μον/s.
Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΜΟΚ τη χρονική στιγμή t_0 , με $K(x\,, 0)$
(ΘΕΜΑ 2019)



15. Θεώρημα του Rolle

Ο **Michel Rolle (1652-1719)** ήταν Γάλλος Μαθηματικός.
Το 1691 διατύπωσε το ομώνυμο θεώρημα.
Το θεώρημά του είναι ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού.

Α. Τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$

15.1 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 = 4x + 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1, 0)$.

15.2 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 + 3x^2 + 1 = 6x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

15.3 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4\alpha x^3 + 2\beta x = \alpha + \beta$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$.

15.4 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2017x^{2016} - 2016(\alpha + 1)x^{2015} + \alpha = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$.

15.5 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - 3ex^2 + 6x - 2 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

15.6 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - 3ex^2 + 4x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

15.7 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) - f(0) = e$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) - 2x = e^x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

15.8 Δίνεται f συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 2 \cdot \big(f(1) - f(0)\big) \cdot x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$

15.9 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(1) = f(2) - \frac{3}{2}$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$

15.10 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y'y στο 2 και τον άξονα x'x στο $\frac{\pi}{4}$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot f'(x) + \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{4})$.

15.11 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x \cdot f(x) + (x^2 - 4) \cdot f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

15.12 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 10$, $f(3) = 12$.
Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, 3) : f'(\xi) = 2\xi - 3$.

15.13 Δίνεται f συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f(2) - f(0) = 6$.
Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (0, 2) : f'(\xi) = 3\xi^2 - \xi$.

15.14 Δίνεται f συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(1) - f(0) = 1$.
Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (0, 1) : f'(\xi) = \frac{3\xi^3 - 2\xi^2 + \xi}{\xi}$

15.15 Δίνεται f συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $f(2) - f(1) = 3 - \ln 2$.
Να δείξετε ότι:
$\exists x_0 \in (1, 2) : x_0 \cdot f'(x_0) = 2x_0^2 - 1$.

15.16 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) - f(4) = 14$. Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, 4) : 2\sqrt{\xi} \cdot f'(\xi) = 1 - 4\xi\sqrt{\xi}$.

15.17 Δίνεται παραγωγίσιμη και άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :
$\exists\xi\in(-2,2):\ f'(\xi)=2\xi\cdot e^{\xi^2}$

15.18 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Να δείξετε ότι :
$\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right):\ f'(x_0)=x_0\cdot\eta\mu x_0-\sigma\upsilon\nu\, x_0$.

15.19 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=e^2-e$, $f(2)=\frac{e^2}{2}$
Να δείξετε ότι
$\exists\xi\in(1,2):\ \xi^2\cdot f'(\xi)+e^{\xi}\cdot\xi-e^{\xi}=0$.

15.20 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(1)-f(e)=\frac{1}{e}$. Να δείξετε ότι :
$\exists x_0\in(1,e):\ x_0^2\cdot f'(x_0)+1-\ln x_0=0$.

15.21 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\exists\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $(\xi-1)\cdot f'(\xi)+f(\xi)=f(2)$

15.22 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x^2-x)\sigma\upsilon\nu x=(1-2x)\eta\mu x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

15.23 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=\frac{2x\cdot f(x)}{1-x^2}$
έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$

15.24 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$
Να δείξετε ότι $\exists\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right):\ f'(\xi)=\frac{\sigma\upsilon\nu\xi-f(\xi)}{\xi}$

15.25 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο με τετμημένη 1 .
Να δείξετε ότι η εξίσωση
$(x-2)\cdot f'(x)+f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

15.26 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ Να αποδείξετε ότι $\exists\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{2-\xi}$

15.27 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ Να δείξετε ότι
$\exists\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{2\xi}{4-\xi^2}f(\xi)$

15.28 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει $f(0)=f(1)=0$. Να δείξετε ότι
$\exists\xi\in(0,1):\ \frac{f'(\xi)}{\eta\mu\xi}-\frac{f(\xi)}{\sigma\upsilon\nu\xi}=0$

15.29 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f(x)\neq 0,\forall x\in(0,\pi)$. Να δείξετε ότι
$\exists x_0\in(0,\pi):\ \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}+\sigma\varphi x_0=0$.

15.30 Δίνεται παραγωγίσιμη f στο $[0,1]$, $f(1)=1$
Να δείξετε ότι :
$\exists x_0\in(0,1)$: $f'(x_0)=3-\frac{2}{x_0}f(x_0)$

15.31 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(6)=3f(2)$.
Να αποδείξετε ότι $\exists\xi\in(2,6):\ \xi f'(\xi)=f(\xi)$.

15.32 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2)=2f(1)$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\cdot f'(x)-f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

15.33 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $2f(0)=f(1)$.
Να δείξετε ότι $\exists\xi\in(0,1)$: $f'(\xi)=\frac{2\xi}{\xi^2+1}\cdot f(\xi)$.

15.34 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ με $\alpha>0$ και $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι $\exists\xi\in(\alpha,\beta):\ \xi f'(\xi)=2f(\xi)$.

15.35 Δίνεται συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$. Να αποδείξετε ότι
$\exists\,\xi\in(-1,1):\ f'(\xi)=\left(\frac{1}{1-\xi}-\frac{1}{1+\xi}\right)f(\xi)$.

15.36 Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to(0,+\infty)$ συνεχής με $0<\alpha<\beta$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύουν $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$ και $f(\beta)=\frac{1}{\beta}$
Να δείξετε ότι $\exists\xi\in(\alpha,\beta)$: $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\frac{1}{\xi}=0$

15.37 Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to(0,+\infty)$, παραγωγίσιμη και ισχύει $\ln f(\beta)-\ln f(\alpha)=\beta-\alpha$
Να δείξετε ότι $\exists\xi\in(\alpha,\beta): f'(\xi)=f(\xi)$

15.38 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=e^6\cdot f(3)$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+3f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,3)$.

15.39 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=e^2\cdot f(1)$.
Να δείξετε ότι $\exists\xi\in(0,1): f'(\xi)+2f(\xi)=0$

15.40 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=f(2)=0$
Να δείξετε ότι $\exists\xi\in(1,2): f'(\xi)-f(\xi)=0$

15.41 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(3)=f(4)=0$
Να δείξετε ότι $\exists\xi\in(3,4): f'(\xi)+3\xi^2 f(\xi)=0$

15.42 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f(0)=f(\pi)$.
Να δείξετε ότι $\exists\xi\in(0,\pi): f'(\xi)+f(\xi)\text{συν}\xi=0$

15.43 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$ Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+\text{συν}x\cdot f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β)

15.44 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\dfrac{f(2)}{f(1)}=\sqrt{e}$.
Να αποδείξετε ότι: $\exists\xi\in(1,2): \xi^2\cdot f'(\xi)=f(\xi)$.

15.45 Δίνεται παραγωγίσιμη και άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι $\exists\xi\in(-2,2): f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$

15.46 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι
$\exists\, x_0\in(\alpha,\beta): f''(x_0)+\left(f'(x_0)\right)^2=0$.

15.47 Δίνεται παραγωγίσιμη h στο [0,1]: $h^2(0)+h^2(1)=0$.
Να δείξετε ότι $\exists\xi\in(0,1): h'(\xi)=-2015\cdot h(\xi)$.

15.48 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$, $f(1)=1$.
Να δείξετε ότι: $\exists\xi\in(0,1): 3f'(\xi)=\dfrac{4}{1+f^2(\xi)}$.

15.49 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=2$, $f(0)=1$.
Να δείξετε ότι:
$\exists\xi\in(0,1): 2f'(\xi)\cdot(f(\xi)-1)=3\xi^2$.

15.50 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f^2(\alpha)-f^2(\beta)=\alpha^2-\beta^2$.
Να αποδείξετε ότι: $\exists\xi\in(\alpha,\beta): f(\xi)\cdot f'(\xi)=\xi$

15.51 Δίνεται f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$ με $f(1)=ef(0)$ και $f(x)>0\ \forall x\in[0,1]$.
Να αποδείξετε ότι $\exists\xi\in(0,1): f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{2\sqrt{\xi}}$

15.52 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $\dfrac{1}{f(0)}-\dfrac{1}{f(1)}=1$. Αν $f(x)\neq 0, \forall x\in[0,1]$ να αποδείξετε ότι:
$\exists x_0\in(0,1): f'(x_0)=2x_0\cdot f^2(x_0)$.

15.53 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=0$ και $f(1)=\ln 2$.
Να δείξετε ότι:
$\exists x_0\in(0,1): f'(x_0)=2x_0\cdot e^{-f(x_0)}$.

15.54 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=0$ και $f(1)=1$.
Να δείξετε ότι $\exists x_0\in(0,1): f'(x_0)=e^{x_0-f(x_0)}$.

15.55 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[-1,1]\to(0,+\infty)$ ώστε να ισχύει $f(-1)=f(1)$.
Να αποδείξετε ότι
$\exists\xi\in(-1,1): f'(\xi)\cdot\text{συν}f(\xi)=2\xi^3$.

15.56 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[-1,1]\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f(-1)=f(1)$. Να αποδείξετε ότι
$\exists\xi\in(-1,1): f'(\xi)\,e^{f^2(\xi)}=\dfrac{\xi}{f(\xi)}$

15.57 Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[2,3]$, παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ και ισχύει $f(3)=2f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$, να διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$.

15.58 Έστω f παραγωγίσιμη στο $[2,3]$, και ισχύει $2f(3)=3f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f, ώστε η εφαπτομένη να περνά από την αρχή των αξόνων.

15.59 Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει $f(0)=f(1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να διέρχεται από το σημείο $A(\xi+1, 2f(\xi))$.

15.60 Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[1,3]$, παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ και ισχύει $3f(1)=f(3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

15.61 Δίνεται παραγωγίσιμη $g:[1,2]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ όπου f παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ με $f(2)=4f(1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

15.62 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ με $\alpha>0$ και $\beta\cdot f(\alpha)-\alpha\cdot f(\beta)=0$.
Να δείξετε ότι :

α) $\exists\, x_0 \in (\alpha,\beta)$: $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$

β) υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

15.63 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=f\left(\frac{3}{2}\right)=0$.
Να αποδείξετε ότι $\exists\, \xi \in \left(0,\frac{3}{2}\right): f'(\xi)=-f(\xi)$.
(ΘΕΜΑ 2004)

15.64 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f'(0)=2f(2)$, $f'(2)=2f(2)+12e^4$.
Να αποδείξετε ότι :

α) η $g(x)=3x^2-\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$, $0\le x\le 2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0,2]$

β) $\exists\, \xi \in (0,2): f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$
(ΘΕΜΑ 2009 Ε)

15.65 Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=2012$, να αποδείξετε ότι $\exists\, x_0 \in (x_1, x_2): f'(x_0)+f(x_0)=2012$
(ΘΕΜΑ 2012)

Β. Το Πολύ Μια Ρίζα

15.66 Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5-5x+\alpha=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(-1,1)$.

15.67 Να δείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x=2-x$ έχει το πολύ μια ρίζα

15.68 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)+4f(x)-2x=e^x-3, \forall x\in\mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x'x σε ένα το πολύ σημείο.

15.69 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(2)=2f(1)$ και $f''(x)\neq 0, \forall x\in(1,2)$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=xf'(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,2)$.

Γ. Γενικές-Συνδυαστικές Ασκήσεις στο Rolle

15.70 Δίνεται η $f(x)=(1-2\alpha)\cdot\ln x-2\alpha x+2$.
Να βρείτε την τιμή του α, ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[1,e]$

15.71 α) Δίνεται η $f(x)=x^2-(\alpha+1)x+3\alpha-5$.
Να βρείτε την τιμή του α, ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[2,4]$
β) Για την τιμή του α που βρήκατε, να βρείτε $x_0\in(2,4): f'(x_0)=0$

15.72 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+4, & -1\le x<0\\ -7x^2+4x+4, & 0\le x\le 1\end{cases}.$$

Να εξετάσετε αν ισχύει το Rolle στο $[-1,1]$

15.73 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^2-4x+1, & -2\le x<0\\ x^2+(\beta-2)x+1, & 0\le x\le 4\end{cases}.$$

Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[-2,4]$

15.74 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta\ , & x<0 \\ 3+(\gamma-\alpha)x\ , & x\geq 0 \end{cases}$.
Να βρείτε τις τιμές των α,β,γ ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[-1,1]$

15.75 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta\ , & x\leq 0 \\ \gamma x^2+4x+4\ , & x>0 \end{cases}$.
Να βρείτε τις τιμές των α,β,γ ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[-1,1]$

15.76 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^5(x)+(fof)(x)=x^5+1\ ,\forall x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:
α) η f είναι 1-1
β) η εξίσωση
$f\left(6x^5+4(\alpha-1)x^3\right)=f(\alpha+2\beta-4\beta x)$
έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$.

15.77 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 0\ ,\forall x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :
α) η f είναι 1-1
β) η εξίσωση
$f\left(4x^3+3(\alpha-3)x^2\right)-f\left(2(3\alpha+\beta)x-3\beta\right)=0$
έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,3)$.

15.78 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f'(\alpha)=0\ ,f(\beta)=0$.
Να δείξετε ότι $\exists\xi\in(\alpha,\beta):\ f''(\xi)=0$

15.79 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία με τετμημένες $1,2,3$.
Να δείξετε ότι $\exists\xi\in(1,3):\ f''(\xi)=0$

15.80 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[-2,2]$ με $f(1)=0$ και $g(x)=f(x)(x^2-4)$
Να αποδείξετε ότι $\exists\xi\in(-2,2):\ g''(\xi)=0$

15.81 Δίνεται 3 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[2,6]\to\mathbb{R}$ με $f(2)=f(6)$ και $f'(2)=f'(6)=0$.
Να δείξετε ότι $\exists\xi\in(2,6):\ f'''(\xi)=0$

15.82 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1\ ,f(1)=e-1,f(2)=e^2-8$.
Να δείξετε ότι $\exists\xi\in(0,2):\ f''(\xi)+6\xi=e^{\xi}$

15.83 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1\ ,f(2)=4-\ln 2$, $f(e)=e^2-1$. Να δείξετε ότι
$\exists\xi\in(1,e):\ f''(\xi)-2=\frac{1}{\xi^2}$

15.84 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Η ευθεία $y=2016$ τέμνει την C_f στα σημεία με τετμημένες $1,2,3$.
Να αποδείξετε ότι:
α) Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει 2 τουλάχιστον ρίζες στο $(1,3)$
β) $\exists\xi\in(1,3):\ f''(\xi)=f'(\xi)$.

15.85 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=f(1)$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\exists x_0\in(0,1):f'(x_0)=0$.
β) $\exists\xi\in(0,1):\ 2\cdot f'(\xi)+\xi\cdot f''(\xi)=0$.

15.86 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύει $f(3)-f(0)=9\ ,\ f'(0)>0$. Να αποδείξετε ότι :
α) $\exists x_0\in(0,3):f'(x_0)=x_0^2$.
β) $\exists\xi\in(0,3):\ f'(\xi)=3\xi$.

15.87 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $f(0)=-1\ ,f(1)=2\ ,f(2)=0$.
Να αποδείξετε ότι $\exists x_0\in(0,2):f'(x_0)=0$

15.88 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $f(3)<0<f(4)$ και $f(4)\cdot f(5)<0$.
Να αποδείξετε ότι η C_f έχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη παράλληλη προς τον άξονα x'x

15.89 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $f(0)=0\ ,f(5)=5\ ,f(6)=2$
Να αποδείξετε ότι
α) υπάρχει $x_0\in(0,5):f(x_0)=2$
β) $\exists\xi\in\mathbb{R}:\ f'(\xi)=0$

15.90 Έστω f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με: $f(x)\geq\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ και η γραφική παράσταση της f' εφάπτεται στον άξονα x'x στα σημεία α και β, με $\alpha<\beta$. Να δείξετε ότι :
α) $f(\alpha)=f(\beta)$
β) υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta):\ f'(x_0)=0$
γ) υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$
δ) $\exists\xi\in(\alpha,\beta):\ f''(\xi)=0$

15.91 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$f(3)=\frac{f(1)+f(2)}{2}\ ,f(1)\neq f(2)$. Να δείξετε ότι :
α) $\exists\xi\in(1,2):2f(\xi)=f(1)+f(2)$
β) $\exists x_0\in(1,3):f'(x_0)=0$.

15.92 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [1,2] \to \mathbb{R}$ με $1 < f(x) < 2$ $\forall x \in [1,2]$, $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [1,2]$. Να δείξετε ότι :
α) υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,2) : f(x_0) = x_0$.
β) η εξίσωση $x f'(x) + f(x) = f'(x) + 2x - 1$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1,2)$.

15.93 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 2x) = f(x - 2)$.
γ) Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-2,9)$, να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(f(x) - 6) = 1$.

15.94 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f''(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι :
α) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ 2 ρίζες
β) η συνάρτηση f' αντιστρέφεται
γ) αν επιπλέον ισχύει $f(1) = e^2 f(0)$, τότε η εξίσωση $f'(x) = 2f(x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$
δ) η γραφική παράσταση της $(f')^{-1}$ τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα το πολύ σημείο

15.95 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $xf(x) + 1 = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
α) Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\cdot x} , & x \neq 0 \\ 1 , & x = 0 \end{cases}$
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο $A(0, f(0)$
γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0^+} [x \cdot \ln x \cdot f(x)]$
δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $(\xi^2 - \xi) \cdot f'(\xi) = (1 - 2\xi) f(\xi)$

15.96 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(1)f'(1)\, x^3 + x^2 + 2018}{f(4)f'(4)\, x^3 - 3x + 2020} = 1$. Να δείξετε :
α) η εξίσωση $f''(x) = -\dfrac{\left(f'(x)\right)^2}{f(x)}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,4)$
β) $\exists \xi \in (0,4) : \xi f(\xi) f'(\xi) = e^{\xi} - 1$

15.97 Δίνεται η συνεχής $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} , & x > 1 \\ x^2 + 1 , & x \leq 1 \end{cases}$
Να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ **(ΘΕΜΑ 2018Ε)**

16. Θεώρημα Μέσης Τιμής

Το ΘΜΤ στη σύγχρονη μορφή διατυπώθηκε από τον Γάλλο **Ωγκυστέν-Λουί Κωσύ(1789-1857)** Είναι ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα στην Μαθηματική Ανάλυση αφού με την βοήθειά του αποδεικνύονται πολλά άλλα θεωρήματα.
Το ΘΜΤ είναι επακόλουθο του θεωρήματος Rolle

Α. Να Δείξουμε ότι $f'(\xi) = \alpha$

16.1 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(3) = 5f(1)$.
Να δείξετε ότι : $\exists \xi \in (1,3) : f'(\xi) = 2f(1)$.

16.2 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $3f(5) + f(1) = 0$.
Να δείξετε ότι : $\exists \xi \in (1,5) : f'(\xi) = f(5)$.

16.3 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [0,2], παραγωγίσιμη στο (0,2) ώστε $f(2) = f(0) + 4$
Να δείξετε ότι : $\exists \xi \in (0,2) : f'(\xi) = 2$

16.4 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,7)$ και $B(2,1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f κάθετη στην ευθεία $x - 6y + 1 = 0$.

16.5 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[4,10]$ με $f(4) = 6$ και $f(10) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (4,10)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x'x.

16.6 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[1,3]$ με $f(3) = 12$ και $f(1) = 4$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της εφαπτομένης της C_f στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 4x - 2$

16.7 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 3x - 5$ και στο σημείο $B(3, f(3))$ έχει εξίσωση $y = -x + 7$.
α) Να βρείτε τις τιμές $f(1), f'(1), f(3), f'(3)$.
β) Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1,3) : f'(\xi) = 3$
γ) Να δείξετε ότι $\exists x_0 \in (1,3) : f''(x_0) = -2$

16.8 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(x) > 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$
Να αποδείξετε ότι:
$$\exists \xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = \ln\frac{f(\beta)}{f(\alpha)} \cdot \frac{f(\xi)}{\beta - \alpha}$$

16.9 Δίνεται παραγωγίσιμη $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) > 0, \forall x \in [1,2]$. Να αποδείξετε ότι:
$$\exists \xi \in (1,2) : \frac{f(2)}{f(1)} = e^{\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$$

16.10 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0,1]$ με $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.
(ΘΕΜΑ 2000)

Β. Χωρισμός Διαστήματος ($\exists\ \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$)

16.11 Δίνεται παραγωγίσιμη $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(6) = f(2) + 10$. Να δείξετε ότι :
$\exists\ \xi_1, \xi_2 \in (2,6) : f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 5$.

16.12 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1 , 5], παραγωγίσιμη στο (1,5) ώστε $5f(1) = f(5) = 2$.
Να αποδείξετε ότι :
$$\exists\ \xi_1, \xi_2 \in (1,5) : f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \frac{4}{5}$$

16.13 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [0,9], παραγωγίσιμη στο (0,9) ώστε $f(0) = f(9)$
Να αποδείξετε ότι : $\exists\ \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0,9)$:
$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 0$

16.14 Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(1)=0$. Να δείξετε ότι:
$\exists\ \xi_1,\xi_2\in(0,2):\ f''(\xi_2)-f''(\xi_1)=f'(0)+f'(2)$

16.15 Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι $\exists\ \xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

16.16 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,3]$, παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ ώστε $f(1)<f(3)$.
Να δείξετε ότι:
$\exists\ \xi_1,\xi_2\in(1,3):\ f'(\xi_1)+f'(\xi_2)>0$

16.17 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,2]$, παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ώστε $f(0)>f(2)$.
Να δείξετε ότι:
$\exists\ \xi_1,\xi_2\in(0,2):\ f'(\xi_1)+f'(\xi_2)<0$

16.18 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=\dfrac{f(2)}{5}=-\dfrac{f(6)}{3}$.
Να δείξετε ότι:
$\exists\ \xi_1,\xi_2\in(0,6):\ f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

16.19 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=\alpha,\ f(2)=2\alpha,\ f(3)=\dfrac{5\alpha}{2}$ Να δείξετε ότι:
$\exists\ \xi_1,\xi_2\in(0,3):\ f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\alpha$

16.20 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,6]$, παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ ώστε να ισχύει $f(1)=f(6)$. Να αποδείξετε ότι:
$\exists\ \xi_1,\xi_2\in(1,6):\ f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$.

16.21 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:[1,5]\to\mathbb{R}$ με $f(5)=f(1)+1$. Να αποδείξετε ότι:
$\exists\ \xi_1,\xi_2\in(1,5):\ f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)=1$

16.22 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:[1,8]\to\mathbb{R}$ με $f(8)=2f(1)$. Να αποδείξετε ότι:
$\exists\ \xi_1,\xi_2\in(1,8):\ 2f'(\xi_1)+5f'(\xi_2)=f(1)$.

16.23 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,4]$, παραγωγίσιμη στο $(1,4)$ ώστε να ισχύει $f(1)=f(4)$. Να αποδείξετε ότι:
$\exists\ \xi_1,\xi_2\in(1,4):\ 2f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

16.24 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1,\ f(4)=2$ Να αποδείξετε ότι:
$\exists\ \xi_1,\xi_2\in(1,4):\ f'(\xi_1)+2f'(\xi_2)=1$

16.25 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(22)=f(2)+4$.
Να αποδείξετε ότι: $\exists\ \xi_1,\xi_2,\xi_3\in(2,22)$:
$f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)+6f'(\xi_3)=2$.

16.26 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=4,\ f(10)=9$.
Να αποδείξετε ότι: $\exists\ \xi_1,\xi_2,\xi_3\in(1,10)$:
$2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)+4f'(\xi_3)=5$

16.27 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ώστε $f(0)=1,\ f(1)=0$.
Να αποδείξετε ότι:
α) $\exists\ x_0\in(0,1):\ f(x_0)=x_0$
β) $\exists\ \xi_1,\xi_2\in(0,1):\ f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$.

16.28 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=0,\ f(1)=1$
Να αποδείξετε ότι:
α) $\exists\ x_0\in(0,1):\ f(x_0)=1-x_0$
β) $\exists\ \xi_1,\xi_2\in(0,1):\ f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

16.29 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta$.
Να δείξετε ότι:
α) $\exists\ x_0\in(\alpha,\beta):\ f(x_0)=\alpha+\beta-x_0$
β) $\exists\ \xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta):\ f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

16.30 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=2\beta,\ f(\beta)=2\alpha$
Να δείξετε ότι:
α) $\exists\ x_0\in(\alpha,\beta):\ f(x_0)=2x_0$
β) $\exists\ \xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta):\ f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=4$

16.31 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\alpha)=e,\ f(\beta)=-e$. Να δείξετε ότι $\exists\ \xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta):\ \dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{\alpha-\beta}{e}$

16.32 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(3)=f(1)+4$.
Να αποδείξετε ότι:
α) η εξίσωση $f(x)=f(1)+3$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,3)$
β) $\exists\ \xi_1,\xi_2\in(1,3):\ f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=4$
γ) η εξίσωση $f'(x)=2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,3)$

16.33 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=3$, $f(2)=5$.
Να αποδείξετε ότι:
α) $\exists\, x_0 \in (0,2):\ f(x_0)=4$
β) $\exists\, \xi_1,\ \xi_2,\xi \in (0,2):\ \dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=2$

16.34 Δίνεται συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$.
Να αποδείξετε ότι:
α) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
β) $\exists\, x_0 \in (-1,1):\ f(x_0)=0$
β) $\exists\, \xi_1,\ \xi_2 \in (-1,1):\ \dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{2}{3}$

16.35 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ ώστε $f(1)=-2$, $f(3)=2$.
Να δείξετε ότι:
α) υπάρχει αριθμός $\xi \in (1,3)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2018$
β) $\exists\, \xi_1,\xi_2 \in (1,3):\ f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=4$

Γ. Θ.Μ.Τ. και άλλα Θεωρήματα

16.36 Να δείξετε ότι η $f(x)=\begin{cases} x^2+x, & x<0\\ x^3+x, & x\le 0\end{cases}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ στο $[-1,2]$ και στην συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi\in(-1,2)$ για τα οποία ισχύει το θεώρημα

16.37 Να δείξετε ότι η $f(x)=\begin{cases} x^3-4x, & x\le 2\\ 8x-16, & x>2\end{cases}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ στο $[0,4]$ και στην συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi\in(0,4)$ για τα οποία ισχύει το θεώρημα

16.38 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε για την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha-x, & x\le 0\\ \beta\cdot e^{-x}, & x>0\end{cases}$ να ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[-1,1]$

16.39 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε για την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\beta, & x<0\\ x^3+\alpha\cdot(x-1), & x\ge 0\end{cases}$ να ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[-2,2]$

16.40 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=3$, $f(3)=7$, $f(5)=11$.
Να αποδείξετε ότι: $\exists\,\xi\in(1,5):\ f''(\xi)=0$

16.41 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0)=0$ και $f(x)>0\ \forall x\in(0,1)$.
Να αποδείξετε ότι:
α) $\exists\,\xi\in(0,1):\ f(\xi)=(1-\xi)\cdot f'(\xi)$.
β) $\exists\, x_0 \in (0,\xi):\ f'(x_0)<\dfrac{f'(\xi)}{\xi}$

16.42 Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$, $f(1)=2$, $f(2)=4$.
Να αποδείξετε ότι: $\exists\xi\in(0,2):\ f''(\xi)=0$

16.43 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(2)=f(0)+4$ και $f(4)=f(3)+2$. Να αποδείξετε ότι:
$\exists\xi\in(0,4):\ f''(\xi)=0$.

16.44 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(1)+f(4)=f(2)+f(3)$
Να αποδείξετε ότι: $\exists\,\xi\in(1,4):\ f''(\xi)=0$.

16.45 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[2,6]$ για την οποία ισχύει $2f(4)=f(2)+f(6)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2,6)$.

16.46 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[1,3]$ για την οποία ισχύει $2f(2)=f(1)+f(3)$.
Να δείξετε ότι $\exists\,\xi\in(1,3):\ f''(\xi)=0$

16.47 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη f στο $[1,10]$ ώστε να ισχύει $\dfrac{f(7)-f(1)}{f(10)-f(7)}=2$
Να δείξετε ότι $\exists\,\xi\in(1,10):\ f''(\xi)=0$

16.48 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε οι αριθμοί $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να αποδείξετε ότι:
$\exists\,\xi\in(-1,1):\ f''(\xi)=0$

16.49 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η C_f έχει τρία σημεία συνευθειακά. Να δείξετε ότι $\exists\,\xi\in\mathbb{R}:\ f''(\xi)=0$

16.50 Δίνεται η τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[2,3]$ για την οποία ισχύει $f(3)=f(2)+\alpha$ και $f'(3)=f'(2)+\alpha$
Να δείξετε ότι $\exists\,\xi\in(2,3):\ f''(\xi)=0$

16.51 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$
Να αποδείξετε ότι :
α) υπάρχουν $\xi_1 \in (-1,0)$ και $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοια , ώστε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=1$
β) υπάρχει $\exists\, x_0 \in (-1,1)$: $f''(x_0)+f'(x_0)=1$

16.52 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ για την οποία ισχύει $f^2(1)-f^2(0)>1$.
Να αποδείξετε ότι :
$\exists\, x_0 \in (0,1):\ f'(x_0)\cdot f(x_0)>\frac{1}{2}$

16.53 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $2f(\alpha+1)=f(\alpha)+f(\alpha+2)$.
Να αποδείξετε ότι η f' δεν είναι 1-1

16.54 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha+1)+f(\alpha+2)=f(\alpha)+f(\alpha+3)$.
Να αποδείξετε ότι η f' δεν είναι 1-1

16.55 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
Αν τα σημεία $A(1,f(1))$, $B(2,f(2))$, $\Gamma(3,f(3))$ είναι συνευθειακά , τότε να δείξετε ότι η f' δεν είναι 1-1 .

16.56 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,
να δείξετε ότι : $f(2)+f(3)<f(1)+f(4)$.

16.57 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,
να δείξετε ότι : $f(1)<\frac{f(0)+f(2)}{2}$

16.58 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,
να δείξετε ότι
$f(x+1)+f(x+2)>f(x)+f(x+3)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

16.59 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,
να δείξετε ότι :
$f(2x+3)-f(2x+7)<f(2x+1)-f(2x+5)$.

16.60 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,
να δείξετε ότι :
$f(x^2+1)+f(x^2+2)<f(x^2)+f(x^2+3)$.

16.61 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι :
$x\cdot(f(x)-f(1))<f(x^2)-f(x)$, $x>1$

16.62 Δίνεται συνάρτηση $f(x)=x\cdot\ln x$.
Να δείξετε ότι :
α) η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα
β) $\forall x>1$: $(x-1)\cdot f'(1)<f(x)<(x-1)\cdot f'(x)$

16.63 Δίνεται συνάρτηση $f(x)=x\cdot(\ln x-1)+x^2$
Να δείξετε ότι :
α) η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα
β) $\forall x>0$: $f(x+2)+f(x+4)<f(x)+f(x+6)$

16.64 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο ώστε $f(3)\neq 0$, $3f(1)=9f(3)=f(5)$.
Να αποδείξετε ότι : $\exists\,\xi\in(1,5):\ f'(\xi)=0$.

16.65 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,3]$, παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ με
$f(0)+f(2)=f(1)+f(3)$.
α) Να δείξετε ότι : $\exists\,\xi_1,\xi_2\in(0,3)$:
$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$
β) Αν η f' είναι 1-1 και συνεχής να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,3)$

16.66 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο ώστε να ισχύουν $f(1)=-6$, $f(3)=-2$ και $f(5)=22$. Να δείξετε ότι:
α) $\exists\,\xi_1,\xi_2\in(1,5):\ f'(\xi_1)=2,\ f'(\xi_2)=12$.
β) $\exists\, x_0\in(1,5):\ f'(x_0)=2x_0$

16.67 Δίνεται f παραγωγίσιμη στο $[4,5]$ με $f(4)=-1$ και $f'(x)>6$ για κάθε $x\in(4,5)$
Να δείξετε ότι :
α) $f(5)>5$
β) η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(4,5)$

16.68 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$.
Να αποδείξετε ότι :
α) $f(\alpha)\neq f(\beta)$
β) $\exists\, x_0\in(\alpha,\beta):\ 5f(x_0)=2f(\alpha)+3f(\beta)$
γ) $\exists\,\xi_1,\xi_2,\xi\in(\alpha,\beta):\ \frac{3}{f'(\xi_1)}+\frac{2}{f'(\xi_2)}=\frac{5}{f'(\xi)}$

16.69 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$.
Να αποδείξετε ότι :
α) $f(\alpha)\neq f(\beta)$
β) $\exists\, x_0\in(\alpha,\beta):\ f(x_0)=\frac{2f(\alpha)+f(\beta)}{3}$
γ) $\exists\,\xi_1,\xi_2,\xi\in(\alpha,\beta):\ \frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{2}{f'(\xi_2)}=\frac{3}{f'(\xi)}$

16.70 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$
Να αποδείξετε ότι :
α) υπάρχει τουλάχιστον μια εφαπτόμενη της C_f η οποία είναι παράλληλη στην $y = x + 6$
β) $\exists\, x_0 \in (\alpha, \beta): \ f(x_0) = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$
γ) $\exists\, \xi_1, \xi_2, \xi \in (\alpha, \beta): \ \dfrac{1}{f'(\xi_1)} + \dfrac{1}{f'(\xi_2)} = 2$

16.71 Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο ώστε $f(2) = 0, f(0)f(4) > 0$
Να αποδείξετε ότι : $\exists\, \xi \in (0, 4): \ f'(\xi) = 0$

16.72 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(x) > 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$.
Να αποδείξετε ότι :
$\exists\, \xi_1, \xi_2, \xi_0 \in (\alpha, \beta): \dfrac{f'(\xi_1)}{f(\xi_1)} + \dfrac{f'(\xi_2)}{f(\xi_2)} = 2\dfrac{f'(\xi_0)}{f(\xi_0)}$

16.73 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \le 1 \\ x^3 - \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$.
Αν ισχύει το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[-1, 2]$ τότε :
α) να βρεθούν οι τιμές των α και β .
β) να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $A(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in [-1, 2]$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: \ 2x - y + 3 = 0$.

16.74 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$, $B(-2, 1)$ να λύσετε την εξίσωση
$f^{-1}\left(-4 + f(x^2 - 8)\right) = -2$
γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: \ y = -\frac{3}{4}x + 2$

16.75 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) \ge 1, \forall x \in \mathbb{R}$
α) Αν $A(-1, f(-1)), B(1, f(1))$, να δείξετε ότι $(AB) \ge 2\sqrt{2}$. Αν επιπλέον ισχύει $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$, να δείξετε ότι :
β) $f(0) = 0$
γ) $f(x) \ge x, \ \forall x \ge 0$
δ) η εξίσωση
$\dfrac{f(\alpha^2+2) - \alpha^2 + 1}{x - 2} + \dfrac{f^2(\alpha^2) - \alpha^4 + 1}{x - 1} = 0$
έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, 2)$.

16.76 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2005)$, $B(-2, 1)$ να λύσετε την εξίσωση
$f^{-1}\left(-2004 + f(x^2 - 8)\right) = -2$
γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: \ y = -\frac{1}{668}x + 2005$
(ΘΕΜΑ 2005 Ε)

Δ. Διπλές Ανισώσεις και Θ.Μ.Τ.

16.77 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 2]$ με $f(0) = 3$ και $\forall x \in (0, 2)$ ισχύει $-2 \le f'(x) \le 3$.
Να δείξετε ότι : $-1 \le f(2) \le 9$.

16.78 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 2]$ με $f(1) = 3$ και $\forall x \in (1, 2)$ ισχύει $3 \le f'(x) \le 5$.
Να δείξετε ότι : $6 \le f(2) \le 8$

16.79 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και ισχύει $4 \le f'(x) \le 5$.
Να δείξετε ότι : $9 \le f(2) \le 11$

16.80 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 4]$ με $f(0) = 1$ και ισχύει $2 \le f'(x) \le 5$.
Να δείξετε ότι : $9 \le f(4) \le 21$ **(Σχολικό)**

16.81 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 5]$ με $f(1) = -2$ και για κάθε $x \in (1, 5)$ ισχύει $|f'(x)| \le 2$. Να δείξετε ότι : $-10 \le f(5) \le 6$

16.82 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και $|f'(x)| \le 2$
Να δείξετε ότι : $-7 \le f(5) \le 9$

16.83 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(4) = 1$ και $1 < f'(x) < 2$. Να δείξετε ότι :
α) $-3 < f(2) < -1$
β) $\exists\, x_0 \in (2, 4): \ f(x_0) = 1 - x_0$

16.84 Αν η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι :
$f'(1) < f(1) < f'(0)$

16.85 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' γνησίως αύξουσα
Να δείξετε ότι $f'(1) < f(2) - f(1) < f'(2)$

16.86 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' γνησίως αύξουσα.
Να δείξετε ότι $f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$.

16.87 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' γνησίως αύξουσα.
Να δείξετε ότι $2f(x) < f(x-1) + f(x+1)$

16.88 Να δείξετε ότι: $2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e}$

16.89 Να δείξετε ότι: $\frac{2}{5} < \ln\frac{5}{3} < \frac{2}{3}$.

16.90 Να δείξετε ότι: $\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} < \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\alpha - \beta} < \frac{1}{2\sqrt{\beta}}$
για κάθε $0 < \beta < \alpha$

16.91 Να δείξετε ότι:
$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $x > 0$.

16.92 Να δείξετε ότι: $\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1,\ x > 1$

16.93 Να δείξετε ότι:
$1 + x < e^x < 1 + ex,\ x \in (0,1)$.

16.94 Να δείξετε ότι:
$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$, $x > 0$.

16.95 Να δείξετε ότι:
$\frac{1}{x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) < \frac{1}{x-1}$, $x > 1$.

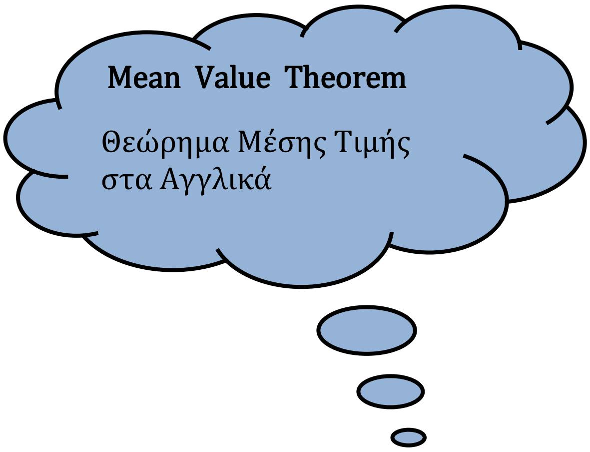
16.96 Να δείξετε ότι:
$e^{\alpha} + e^{\alpha}\cdot(\beta - \alpha) < e^{\beta} < e^{\alpha} + e^{\beta}\cdot(\beta - \alpha)$
με $\alpha < \beta$

16.97 Να δείξετε ότι: $1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x$, $x > 0$.

16.98 Να δείξετε ότι:
$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} < \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{\alpha - \beta} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}$
με $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$

16.99 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$
$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1,\ f(0) = 0$.
α) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f
β) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$, $\forall x > 0$
(ΘΕΜΑ 2002)

16.100 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.
Να δείξετε ότι ισχύει
$f'(x+1) > f(x+1) - f(x), \forall x > 0$
(ΘΕΜΑ 2008)



17. Συνέπειες Θ.Μ.Τ

Α. Σταθερή Συνάρτηση

17.1 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f''(x)+f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)+\left(f'(x)\right)^2$ είναι σταθερή.

17.2 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=f(x)$, $f(0)=1$
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή.
β) Να βρείτε τον τύπο της f.

17.3 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=3f(x)$, $f(0)=\dfrac{1}{3}$
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{-3x}f(x)$ είναι σταθερή.
β) Να βρείτε τον τύπο της f.

17.4 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=2f(x)$, $f(0)=1$, $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln f(x)-2x$ είναι σταθερή.
β) Να βρείτε τον τύπο της f.

17.5 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=2$ και ισχύει $f(0)=1$, $f'(x)=2f(x)(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{x^2+2x}}$ είναι σταθερή.
β) Να βρείτε τον τύπο της f.

17.6 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(2)=3$ και $x\cdot f'(x)=3x-2f(x)$ για κάθε $x>0$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^2f(x)-x^3$ είναι σταθερή.
β) Να βρείτε τον τύπο της f.

17.7 Δίνεταπαραγωγίσιμη $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=0$ και $f'(x)=e^{-f(x)}$
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}-x$ είναι σταθερή.
β) Να βρείτε τον τύπο της f

17.8 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(4)=4e^{-2}$, $2\sqrt{x}f'(x)+f(x)=e^{-\sqrt{x}}$.
α) Να δείξετε ότι η $g(x)=e^{\sqrt{x}}f(x)-\sqrt{x}$ είναι σταθερή στο $[0,+\infty)$
β) Να βρείτε τον τύπο της f.

17.9 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)\sqrt{1+x^2}=f(x)$, $f(0)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η $g(x)=\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)f(x)$ είναι σταθερή.
β) Να βρείτε τον τύπο της f.

17.10 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$ και $x\cdot f'(x)=f(x)-x^2$, για $x>0$
α) Να δείξετε ότι η $g(x)=\dfrac{f(x)+x^2}{x}$ είναι σταθερή
β) Να βρείτε τον τύπο της f

17.11 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $(\ln x+1)f(x)+f'(x)=0$, $x>0$
α) Να δείξετε ότι η $g(x)=x^xf(x), x>0$ είναι σταθερή.
β) Να βρείτε τον τύπο της f.

17.12 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(0)=1$ και $f(0)=0$ για την οποία ισχύει $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{2x}$

17.13 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(0)=3$ και $f(0)=1$ για την οποία ισχύει $f''(x)-6f'(x)+9f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι $f(x)=e^{3x}$

17.14 Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=g(1)$, $g(x)\neq 0, f'(x)g(x)=g'(x)f(x), \forall x\in\mathbb{R}$
Να δείξετε ότι $f=g$

17.15 Αν για μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ισχύει $|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή. **(Σχολικό)**

17.16 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)+2xf(x)=e^{x-x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η $g(x)=e^{x^2}f(x)-e^x$ είναι σταθερή

β) Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg(x)-\eta\mu x}{x}=1$, να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στον άξονα x'x

17.17 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f'(x)=\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\big(f(x)+f'(x)\big)e^{-x}$ είναι σταθερή

β) Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

γ) Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της C_f και τη χρονική στιγμή που περνάει από το $A(\ln 10\,,\kappa)$ η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 20 μον/s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη χρονική στιγμή που το Μ περνάει από το Α

17.18 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f'(x)(f(x)-x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-2xf(x)$ είναι σταθερή

β) Να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{|x|+\eta\mu x}$

δ) Αν h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=f(x)$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε $f(\xi)=h(x+1)-g(x)$

17.19 Δίνεται $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $e^{2xf''(x)}(e^3 f(x))^{f'(x)}=1$. Επίσης η εφαπτόμενη της C_f στο $M\big(16\,,f(16)\big)$ είναι η ευθεία $\varepsilon:\ \sqrt{e}\cdot x+64y-80\sqrt{e}=0$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(16)$ και $f'(16)$

β) Να δείξετε ότι η $g(x)=\sqrt{x}\cdot\ln f(x)$ είναι σταθερή

γ) Να βρείτε τον τύπο της f

δ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{f(x)}$

17.20 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=-2xf^2(x)$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή .

β) Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

(ΘΕΜΑ 2001)

17.21 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=3$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή .

β) Να δείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$.

(ΘΕΜΑ 2010)

Β. Πόρισμα Σταθερής Συνάρτησης

17.22 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0)=1$, $f'(x)=x^3+3x^2$

17.23 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1)=5$, $f'(x)=3x^2-6x+2$

17.24 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=2$, $f'(x)=3x^2-2x+\sigma\upsilon\nu x-2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ Να βρείτε τον τύπο της f .

17.25 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=3$, $f'(x)=e^x-\eta\mu x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

17.26 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=e^2$, $f'(x)=2e^{2x}+\dfrac{1}{x}$ Να βρείτε τον τύπο της f .

17.27 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=3$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{x-1}{x^2}$ $\forall x>0$. Να βρείτε την f .

17.28 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0)=0$, $f'(x)=2x-e^{-x}$.

17.29 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0)=1$, $f'(x)=e^{2x}+\sigma\upsilon\nu 2x$.

17.30 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1)=-1$, $f'(x)=\dfrac{3x+1}{x^2}$, $\forall x>0$.

17.31 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f'(x) = 3\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

17.32 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = 6$, $x \cdot f'(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x$

17.33 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = 0$, $f'(x) = 2\,\frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

17.34 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

17.35 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = \ln 5$, $f'(x) = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}$

17.36 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

17.37 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = \frac{\ln 2}{2}$, $f'(x) = 2xe^{-x^2} + \frac{x}{x^2+2}$

17.38 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} = x$, $x \in \mathbb{R}$

17.39 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = e$, $f'(x) = 2x \cdot \left(\frac{1}{x^2+1} + e^{x^2+1}\right)$

17.40 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 3$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + 2^x \cdot \ln 2$

17.41 Δίνεται συνεχής $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και ισχύει

$$2\sqrt{1-x} \cdot f'(x) = 1 + \frac{2\sqrt{1-x}}{x} \quad , \forall x \in (0,1)$$

Να δείξετε ότι :

α) $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$, $x \in (0, 1]$

β) η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

γ) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 f^{-1}(x)) = 0$ και $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x} = 0$

δ) η εξίσωση $f(x) = -x$ έχει ακριβώς μια ρίζα

17.42 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f'(1) = 2$, $f(0) = 1$, $f''(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

17.43 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f'(0) = 1$, $f(1) = -3$, $f''(x) = 6x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

17.44 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f'(1) = 2$, $f(0) = 1$, $f''(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

17.45 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f'(0) = 1$, $f(1) = -3$, $f''(x) = 6x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

17.46 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f'(0) = 2$, $f(1) = 2$, $f''(x) = 6x + 4e^{2x}$

17.47 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f'(0) = -1$, $f(0) = 2$, $f''(x) = e^{-x} - \sigma\upsilon\nu x$

17.48 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f''(x) = 6x + 4$ και η εφαπτόμενη της C_f στο $M(0, 1)$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: \ y = 2x + 1$. Να βρείτε :

α) τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$

β) τον τύπο της f

γ) το όριο $\lim\limits_{x\to -1} f(x) \cdot \eta\mu\frac{1}{x}$

17.49 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 2$, $f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$

17.50 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(x) = \eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x - e^{-x}$

17.51 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - x \cdot \eta\mu x$

17.52 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$, $f(1) = -1$.
Να βρείτε την f.

17.53 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $xf'(x) = 2x^2\ln x + x^2$, $f(1) = 0$.
Να βρείτε την f.

17.54 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $e^{-x}f'(x) = x^3 + 3x^2$ και η εφαπτόμενη της C_f στο $M(1, f(1))$ τέμνει τον άξονα x’x στο σημείο με τετμημένη $\frac{1}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 2f(1)$

β) Να βρείτε τον τύπο της f

17.55 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f'(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$, $x > 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$

17.56 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $x^2 f'(x) + \ln x = 1$, $x > 0$, $f(1) = 0$

17.57 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(x)+xf'(x)=3x^2+1$, $f(1)=2$, $x>0$

17.58 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(x)+xf'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(\pi)=\frac{1}{\pi}$, $x>0$

17.59 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $2f(x)+xf'(x)=\frac{1}{x^2}$, $f(1)=0$, $x>0$

17.60 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $(x^2+1)\cdot f'(x)+2x\cdot f(x)=1$, $f(0)=2$.

17.61 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $(x^2-x)\cdot f'(x)+x\cdot f(x)=1$, $x>0$

17.62 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $x\cdot f'(x)+f(x)=e^x$, $x\geq 0$

17.63 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f'(x)=\frac{f(x)}{x-1}+e^x(x-1)$, $x>1$ με $f(2)=e^2$

17.64 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $xf'(x)+x^2=f(x)+x^2e^x$, $f(1)=e-1$, $x>0$

17.65 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $xf'(x)-f(x)=x^2\eta\mu x+x^3\sigma\upsilon\nu x$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$, $x>0$.

17.66 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0)=-3$, $f'(x)=\frac{2x-x^2}{e^{-x}}$

17.67 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f'(x)+2xf(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$, $f(x)\neq 0$.

17.68 Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(0)=f'(0)=1$ και τέτοια ώστε $f''(x)-f'(x)=6x-3x^2, \forall x\in\mathbb{R}$ Να βρείτε τον τύπο της f.

17.69 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x)>0$ με $f''(x)-2xf'(x)=2f(x)$ και $f'(0)=0$, $f(2)=e$. Να βρείτε τον τύπο της f.

17.70 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με $f(2)=e^5$, $xf'(x)+f(x)\ln f(x)=2xf(x), x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f .

17.71 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(e)=2$ και $xf'(x)\ln x+2f(x)=0$, $x>1$. Να βρείτε τον τύπο της f

17.72 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f'(x)=(2x+1)\cdot e^{-f(x)}$, $f(0)=0$.

17.73 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$, $f'(x)-4x^3\cdot e^{-f(x)}=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

17.74 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $xf'(x)=(x-1)\cdot e^{-f(x)}$, $f(1)=0, x>0$.

17.75 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(e)=-2$, $e^{f(x)}(x f'(x)+1)=-\frac{1}{x^2}$, $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f

17.76 Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(0,+\infty)$ ώστε $2f'(x)=\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\cdot e^{f(x)}$, $f(1)=0$

17.77 Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(0,+\infty)$ ώστε να ισχύει $f'(x)=(3x^2+2x)\cdot e^{-f(x)}$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(2,f(2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta: 4x-3y+8=0$

17.78 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$, $\frac{f'(x)}{x+1}=e^{x-f(x)}$, $x>0$ Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x+x$, $x>0$.

17.79 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f'(x)f(x)=x$, $f(0)=1$.

17.80 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1)=-2$, $f'(x)\cdot f(x)=2x^3, x>0$

17.81 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=-2$, $f'(x)f(x)=e^{2x}+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

17.82 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $e^{-2x}\cdot f'(x)\cdot f(x)-1=0$, $f(0)=1$.

17.83 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ με $f(0)=\sqrt{2}$ και $f'(x)=\frac{x-e^{-x}}{f(x)}$ Να βρείτε τον τύπο της f.

17.84 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x$, $f(0) = 1$, $f(x) > 0$

17.85 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{x^2+1} + 1$, $f(0) = 1$, $f(x) > 0$

17.86 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $\frac{f'(x)}{2\cdot\sqrt{f(x)}} = 2x$, $f(0) = 1$, $f(x) > 0$

17.87 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f'(x) = 4x\sqrt{f(x)}$, $f(1) = 9$, $f(x) > 0$

17.88 Να βρείτε τον τύπο της $f(x) > 0$ αν ισχύουν $f'(x)f(x) = e^x\sqrt{1 + f^2(x)}$, $f(0) = \sqrt{3}$

17.89 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f'(x) + 2xf^2(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $f(x) \neq 0$

17.90 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ με $f(1) = 1$, $x^2 f'(x) + f^2(x) = 0$. Να βρείτε την f

17.91 Να βρείτε τον τύπο της $f(x) \neq 0$ αν $(x + 1)f'(x) + f^2(x) = 0$, $x > 0$, $f(e - 1) = 1$

17.92 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 1 - e^x$, $f(0) = 1$, $f(x) > 0$

17.93 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 2$, $f'(x) + 2f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

17.94 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(\ln 2) = 1$, $f'(x) + f(x) = x + 1$.

17.95 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(x) - f(x) = e^{2x}$.

17.96 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(-1) = -2$, $f'(x) = (2x + 1)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

17.97 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(-1) = 2$, $f'(x) = (3x^2 + 2x)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

17.98 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(x) + 3x^2 \cdot f(x) = x^2$

19.99 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = \frac{3}{e}$, $2xf(x) + f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2}$

17.100 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(x) = 2x \cdot (1 + f(x))$.

17.101 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(1) = e^2$, $f'(x) - f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$.

17.102 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(1) = e$, $f'(x) = f(x) + \ln^2 x - 2\frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

17.103 Έστω παραγωγίσιμη f στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $f'(x) = e^{συνx} - ημx \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{συνx}$

β) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

17.104 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(4) = 1$, $2xf'(x^2) + f(x^2) = 0$, $\forall x > 0$

17.105 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = 2$, $f'(2x - 1) = 4x$.

17.106 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = 2$, $f'(x - 2) = 2x + 3$.

17.107 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = 2e$, $f'(\ln x) = 2x + 1$, $x > 0$

17.108 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = 2$, $f'(e^x) = x + 1$, $x > 0$.

17.109 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $(f(x) + x) \cdot (f'(x) + 1) = x$, $f(0) = 1$

Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

17.110 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $(f(x) + 2x) \cdot (f'(x) + 2) = 4x$, $f(0) = 1$, $x \in \mathbb{R}$

17.111 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}^*$ με $f(-1) = -4$, $f(1) = 3$ και $f'(x) = \frac{3x^2 + x + 2}{x}$

Να βρείτε τον τύπο της f

17.112 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}^*$ με $f(-1) = 3$, $f(1) = 2$ και $f'(x) = 2 - \frac{f(x)}{x}$

Να βρείτε τον τύπο της f

17.113 Δίνεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ \frac{2}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$, $f(1) = 0$. Να βρείτε τον τύπο της f

17.114 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με
$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-2x+2\,,\ x<1\\ \dfrac{2}{x}\,,\ x>1\end{cases}\ ,\quad f(1)=1$$
Να βρείτε τον τύπο της f

17.115 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με
$$f'(x)=\begin{cases}3x+1\,,\ x<0\\ 2x^2+1\,,\ x\geq 0\end{cases}\ ,\ f(1)=\frac{2}{3}\,.$$
Να βρείτε τον τύπο της f

17.116 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0\,,f'(0)=1$ για την οποία ισχύει $f''(x)=[f'(x)]^2\,,x<1$.
Να δείξετε ότι $f(x)=-\ln(1-x)$

17.117 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1\,,f'(0)=-1$ και $f''(x)+2f'(x)+f(x)=0\,,x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε τον τύπο της f

17.118 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(0)=f'(0)=1\,,f''(x)+2f'(x)+f(x)=0$

17.119 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $2f(0)=f'(0)=2\,,f''(x)-2f'(x)+f(x)=e^x$

17.120 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x^2+1)f''(x)+4xf'(x)+2f(x)=0\,,x\in\mathbb{R}$
Αν η διχοτόμος της $1^{ης}$ γωνίας των αξόνων εφάπτεται στη C_f στο $M(0\,,f(0))$,
να βρείτε τον τύπο της f

17.121 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=2\,,f'(x)+f(x)=1$
α) Να δείξετε ότι $f(x)=1+e^{1-x}$
β) Να δείξετε ότι $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ ισχύει
$(\alpha-\beta)e^{1-\alpha}<e^{1-\beta}-e^{1-\alpha}<(\alpha-\beta)e^{1-\beta}$

17.122 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=0\,,f'(1)=2$ για την οποία ισχύει $x^2\cdot f''(x)+1=x$.
Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $g(x)=f(x)-\ln x$ και $h(x)=x\cdot\ln x$ είναι ίσες για κάθε $x>0$

17.123 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$f(0)=0$ και $3f'(x)=e^{x-f(x)}$
α) Να βρείτε τον τύπο της f
β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης.

17.124 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με
$f(1)=0$ και $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{x^2}$
α) Να δείξετε ότι η $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$
β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x^2)\cdot\text{συν}2x]$

17.125 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0\,,\ f(0)=1\,,\ 2f'(x)=-f^2(x)\text{συν}x$
α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα x'x
β) Να βρείτε τον τύπο της f
γ) Να δείξετε ότι $f(x)\leq 2$
δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $y=x$
ε) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot f(x)\right)$

17.126 Δίνεται $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ ώστε να ισχύουν
$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-x-\text{ημ}x\cdot\text{ημ}3x}{\sqrt{x^2+4}-2}=-8\ \text{ και}$$
$f''(x)f(x)=\left(f'(x)\right)^2+6xf^2(x)$. Να βρείτε :
α) την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $M\left(0\,,f(0)\right)$
β) τον τύπο της f

17.127 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1\,,\ (x^2+1)\left(f(x)+f'(x)\right)=2xf(x)$
α) Να βρείτε τον τύπο της f
β) Να δείξετε ότι :
β1) η γραφική παράσταση της f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο $A(x_0\,,y_0)$ με την γραφική παράσταση της $g(x)=x$
β2) $\exists\xi\in(0\,,x_0)$: $f'(\xi)=1-\dfrac{1}{x_0}$

17.128 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)+f(x)\text{συν}x=0$
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
β) Αν επιπλέον ισχύει $f''(0)=-2$, να βρείτε :
β1) την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $M\left(0\,,f(0)\right)$
β2) τον τύπο της f
με

17.129 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) - f(x) = 2xe^x$ και η C_f στο σημείο τομής της με τον άξονα y'y έχει εφαπτόμενη κάθετη στην ευθεία $y = x$. Να βρείτε :

α) τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$

β) την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα y'y

γ) τον τύπο της f

δ) το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

17.130 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $2f'(x) = e^{x-f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
(ΘΕΜΑ 2005)

17.131 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} = 0$ και $f(1) = e^2$.
Να βρείτε τον τύπο της f . **(ΘΕΜΑ 2009 Ε)**

17.132 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(x) + 2x = 2x(f(x) + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
(ΘΕΜΑ 2010Ε)

17.133 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(0) = f(0) = 0$ και ικανοποιεί τη σχέση $e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x - x)$.
(ΘΕΜΑ 2011)

17.134 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και $2f'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)e^{f(x)}$ με $x > 0$. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$
(ΘΕΜΑ 2012 Ε)

17.135 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.
(ΘΕΜΑ 2013)

17.136 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $f(1) = \frac{1}{2}$
Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ **(ΘΕΜΑ 2013 Ε)**

17.137 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x)\left[e^{f(x)} + e^{-f(x)}\right] = 2$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0)=0$.
Να δείξετε ότι $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
(ΘΕΜΑ 2015)

17.138 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$, $(x^2 - x)f'(x) + xf(x) = 1$, $\forall\, x > 0$.
Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} , & 0 < x \neq 1 \\ 1 , & x = 1 \end{cases}$
(ΘΕΜΑ 2015 Ε)

Γ. Η Ιδιότητα $f'(x) = f(x)$

17.139 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = e$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $x^2f'(x) + 2xf(x) = x^2 \cdot f(x)$, $x > 0$

17.140 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(0) = 3$, $f'(x) - x^3 = f(x) - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

17.141 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x^2 + 2)f'(x) + 2xf(x) = (x^2 + 2) \cdot f(x)$

17.142 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 2$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x^2 + x + 1)f'(x) - (2x + 1)f(x) = (x^2 + x + 1)f(x)$

17.143 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(x) > 0$, $f'(x) = f(x) \cdot \ln f(x)$, $f(1) = e^e$, $x \in \mathbb{R}$.

17.144 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f'(x) \cdot συνx - f(x) \cdot ημx = f(x) \cdot συνx$, $f(0) = 4$

17.145 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f ορισμένη στο $(0, \pi)$ με $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$,
$f'(x) \cdot ημx = f(x) \cdot (ημx - συνx)$

17.146 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $[f'(x) - f(x)] \cdot (2 + συνx) - f(x)ημx = 0, f(0) = 2$

17.147 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(2) = 3e^2$ και για κάθε $x > 1$ ισχύει $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} f(x)$, $\forall x > 1$

17.148 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο $A(0,f(0))$ έχει εξίσωση $y = 3x - 1$.
Να βρείτε την f.

17.149 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = f'(0) = e$, $f(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) \cdot f''(x) - f(x) \cdot f'(x) = (f'(x))^2$.
Να βρείτε τον τύπο της f.

17.150 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f''(x) + [f'(x)]^2 = f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Αν η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται στη C_f στο $M(0,1)$, να βρείτε τον τύπο της f

Constant function

Σταθερή συνάρτηση στα Αγγλικά

17.151 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$ και $2xf'(x) + x^2 f''(x) = -f'(x)$, $x > 0$.
Να βρείτε τον τύπο της f.

17.152 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = \sqrt{2}$, $f(x) \neq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $2f'(x) = 2 + f(x) - x - \dfrac{1}{f(x) - x}$.
Να βρείτε τον τύπο της f.

18. Μονοτονία Συνάρτησης

Α. Μελέτη Μονοτονίας

18.1 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=x^2-8x+5$

18.2 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$.

18.3 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=-x^3+3x^2$

18.4 Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των :
α) $f(x)=x^3+3x-4$ β) $f(x)=2x^3-3x^2-12x$
(Σχολικό)

18.5 Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$

18.6 Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-6$

18.7 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=x^4-2x^2+2020$

18.8 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x+1$

18.9 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

18.10 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

18.11 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

18.12 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$

18.13 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ **(Σχολικό)**

18.14 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2+1}$

18.15 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

18.16 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-5x+4}$

18.17 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

18.18 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$

18.19 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

18.20 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

18.21 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=x-\ln x$

18.22 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=x-\ln(x+1)$

18.23 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=x^2-2\ln x$

18.24 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=x^2-x-\ln x$

18.25 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=x\cdot\ln x$.

18.26 Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x)=x(\ln x-3)$

18.27 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=x-e^x$

18.28 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^x$

18.29 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$

18.30 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - x^2$

18.31 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = (2x^2 - 8x) \cdot \ln x - x^2 + 8x + 2$

18.32 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$

18.33 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

18.34 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

18.35 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = e^{x^3 - 12x}$

18.36 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 4x + 3$

18.37 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \ln(x^2 + 4)$

18.38 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$

18.39 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 8)$

18.40 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + \ln(3x + 21)$
α) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης f.
β) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f

18.41 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x$

18.42 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - \ln(x + 1)$

18.43 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(2x) + 4x^2 - 2x - 3$

18.44 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = 3e^x + x^2 - 3x + 7$

18.45 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = 4e^x + 2x^2 - 4x$

18.46 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = e^x + x\ln x - (e + 1)x$

18.47 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-1} - x^2 + 3$

18.48 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

18.49 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\ln x\ , & x > 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$

18.50 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}}\ , & x > 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$

18.51 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2\ , & x \leq 1 \\ x + 2\ , & x > 1 \end{cases}$ **(Σχολικό)**

18.52 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\ , & x \geq 0 \\ x^2 + 2x\ , & x < 0 \end{cases}$

18.53 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2\ , & x \leq 0 \\ x + 1 - e^x\ , & x > 0 \end{cases}$

18.54 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2\ , & x \leq 1 \\ x - 2\ln x\ , & x > 1 \end{cases}$

18.55 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 5\ , & x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 3\ , & x > 2 \end{cases}$

18.56 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 1\ , & x \leq 3 \\ x^2 - 8x + 37\ , & x > 3 \end{cases}$

18.57 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 1|$ **(Σχολικό)**

18.58 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = |x^2 - x - 12|$

18.59 Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = e^x + 2x - 1$

18.60 Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = e^{x+1} + 3x + 2$

18.61 Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = e^{2x} - \frac{1}{x} + 1$

18.62 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $2xf(x) + (x^2+1)f(x) = e^x$, $f(0) = 1$.
α) Να βρείτε τον τύπο της f
β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f

18.63 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^5(x) + f^3(x) + f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$, $x \in \mathbb{R}$
Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f

18.64 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^3(x) + e^{f(x)} = 1 - x - x^3$, $x \in \mathbb{R}$.
Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f

18.65 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $3f(x) + \text{συν}(f(x)) = x$, $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

18.66 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $g(x) = f(x+3) - f(x+2)$

18.67 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^5 + 5x - 6$ και $g(x) = 2\sqrt{x} + x - 3$
α) Να δείξετε ότι οι f , g είναι γνησίως αύξουσες
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών τους
γ) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $x^5 + 5x - 6 = 0$ και $2\sqrt{x} + x - 3 = 0$ έχουν μοναδική λύση $x = 1$ **(Σχολικό)**

18.68 Δίνεται η $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$
α) Να μελετήσετε την μονοτονία της f
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

18.69 Δίνεται η $f(x) = \ln(e^x - e)$
α) Να μελετήσετε την μονοτονία της f
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

18.70 Δίνεται η $f(x) = 3e^{2x-4} + 1$, $x \geq 2$
α) Να μελετήσετε την μονοτονία της f
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

18.71 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}+1}$
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να βρείτε την αντίστροφή της.

18.72 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to1} \frac{(x+1)f'(x) - \eta\mu^2(x-1)}{\sqrt{x+3}-2} = -168$ και $xf''(x) + f'(x) = 18x^2$, $x > 0$.
α) Να δείξετε ότι $f'(1) = -42$
β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f
γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(1) = 3$, να βρείτε :
γ1) τον τύπο της f
γ2) την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$

18.73 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = e^x - e\ln x$ **(ΘΕΜΑ 2007 Ε)**

18.74 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1)$ **(ΘΕΜΑ 2009)**

18.75 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ **(ΘΕΜΑ 2013 Ε)**

18.76 Να αποδείξετε ότι η $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} , & x \neq 0 \\ 1 , & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0 και στη συνέχεια ότι είναι γνησίως αύξουσα . **(ΘΕΜΑ 2014)**

Β. Επίλυση Εξισώσεων με Μονοτονία

18.77 Να λυθεί η εξίσωση : $3x^2 + 2x = 5 - \ln x$.

18.78 Να λυθεί η εξίσωση : $e^{x-1} + x^3 = 3 - x$.

18.79 Να λυθεί η εξίσωση : $x^2 + 6\ln x = 4x - 3$.

18.80 Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x^2}{2} - 4x + 4\ln x + \frac{7}{2} = 0$

18.81 Να λυθεί η εξίσωση : $\ln(e + x) = 1 - x$

18.82 Να λυθεί η εξίσωση : $\ln x + 2 = \sqrt{5 - x}$

18.83 Να λυθεί η εξίσωση : $e^{\eta\mu x} = 1 - \eta\mu x$

18.84 Να λυθεί η εξίσωση : $2^x + 5^x = 7^x$.

18.85 Να λυθεί η εξίσωση : $\ln\frac{x^2+1}{x^2+x+1}=x$

18.86 Να λυθεί η εξίσωση : $e^{x^3-x}-e^{2x}=x-x^3$

18.87 Να λυθεί η εξίσωση : $\ln x=x-1$.

18.88 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3\ln x$ και $g(x)=4x-3+\ln x$. Να δείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν μοναδικό σημείο τομής.

18.89 Δίνεται η $f(x)=e^x-1+\ln(x+1)$.
Να αποδείξετε ότι :
α) η f είναι γνησίως αύξουσα
β) η εξίσωση $e^x=1-\ln(x+1)$ έχει ακριβώς μια λύση $x=0$ **(Σχολικό)**

18.90 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε
$f^3(x)+\ln[f(x)]+e^{f(x)}=x^3+x^2+2x-1, f(x)>0$
α) Να βρείτε την μονοτονία της f
β) Να λύσετε την εξίσωση : $f(\ln x)=f(1-x^2)$.

18.91 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+8^x$.
α) Να βρείτε την μονοτονία της f
β) Να λύσετε την εξίσωση
$(5x-1)^3+8^{5x-1}=(11-7x)^3+8^{11-7x}$

18.92 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x^2}-e$.
α) Να βρείτε την μονοτονία της f
β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-e^9=\ln\frac{3}{x}$

18.93 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e}{x}-\ln x$.
α) Να βρείτε την μονοτονία της f .
β) Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{e}{x}=\ln x$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση :
$\frac{e}{|x|+3}-\frac{e}{2|x|+1}=\ln\frac{|x|+3}{2|x|+1}$

18.94 Δίνεται η $f(x)=x^5+2^{x-1}+x-3$
α) Να βρείτε την μονοτονία της f .
β) Να λύσετε την εξίσωση $x^5+2^{x-1}+x=3$
γ) Να λύσετε την εξίσωση :
$2|\ln x-1|^5+2^{|\ln x-1|}=6-2|\ln x-1|$

18.95 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .
β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^4+1)=f\left(2e^{x^2-1}\right)$
γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{\ln^2 x+1}$
έχει μοναδική ρίζα στο $(1, e)$

18.96 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln x$
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
β) Να λυθούν οι εξισώσεις :
β1) $\ln\left(\frac{e}{x}\right)=x$
β2) $2-\ln(x^2-1)=x^2$
β3) $f(x)+f(x^{11})=f(x^5)+f(x^{96})$

18.97 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-1+\ln x$
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
β) Να λυθεί $f(x)+f\left(e^{x-1}\right)=f\left(\sqrt{x}\right)$

18.98 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x+\ln x-1$
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
γ) Να λύσετε την εξίσωση
$e^{x^2+1}-e^{2x}=\ln\frac{2x}{x^2+1}-(x-1)^2$

18.99 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=7x^5+3e^x-10$
α) Να βρείτε την μονοτονία της f .
β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
γ) Να λύσετε την εξίσωση :
$7(2x-3)^5+3e^{2x-3}=7(4-5x)^5+3e^{4-5x}$
δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $7x^5+3e^x=10$
έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$

18.100 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+\sqrt{x-4}$
α) Να βρείτε την μονοτονία της f .
β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
γ) Να ορίσετε την αντίστροφη.

18.101 Δίνεται η $f(x)=x^3-x^2+2x-1$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)-2016)=1$ έχει μοναδική λύση .
δ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$

18.102 Δίνεται η $f(x)=x^3+2x-2$
α) Να μελετήσετε την μονοτονία της f
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα
γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$
δ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x)\geq 1$
ε) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=1$

18.103 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{1}{2}\ln^2 x$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .
β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης .
γ) Να λύσετε την ανίσωση
$f^{-1}\left(f(x)-e+\frac{3}{2}\right)>1$.

18.104 Δίνεται η $f(x)=\ln\left(\sqrt{x+1}-1\right)$, $x>0$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f
β) Να ορίσετε την αντίστροφη f^{-1}
γ) Να βρείτε τα όρια :
γ1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{e^{2x}}$ γ2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}$

18.105 Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο ώστε :
$f(x)=-f(2-x)$, $f'(x)\neq 0$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη .
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα. **(ΘΕΜΑ 2003 Ε)**

18.106 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$
α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f
β) Να λύσετε την εξίσωση
$2(x^2-3x+2)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$
(ΘΕΜΑ 2010)

Γ. Απόδειξη Ανισώσεων με Μονοτονία

18.107 Να δείξετε ότι : $\ln(x+1)<x$, $x>0$

18.108 Να δείξετε ότι : $e^x>(1-x)^3$, $x>0$

18.109 Να αποδείξετε ότι : $e^x\geq 1-\sqrt{x}$, $x\geq 0$

18.110 Να δείξετε ότι : $\frac{2(x-1)}{x+1}<\ln x$, $x>1$

18.111 Να δείξετε ότι : $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$, $x>0$

18.112 Να δείξετε ότι : $\ln(x+1)<e^x-1$, $x>0$

18.113 Να δείξετε ότι : $\ln(x+1)>\frac{2x}{x+2}$, $x>0$

18.114 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\ln x-x^2$
α) Να βρείτε την μονοτονία της f
β) Να δείξετε ότι : $f(e^x)<f\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$, $x>0$

18.115 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^x$.
α) Να βρείτε την μονοτονία της f .
β) Να αποδείξετε ότι : $e^{\alpha-\beta}>\frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha>\beta>0$

18.116 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^6}{e^x}$
α) Να βρείτε την μονοτονία της f .
β) Να αποδείξετε ότι : $e^{\alpha-\beta}>\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^6$, $\alpha>\beta>6$

18.117 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)>3x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$
Να δείξετε ότι $f(2)-f(1)>7$

18.118 Έστω f συνεχής στο $[0,+\infty)$, παραγωγίσιμη $(0,+\infty)$ ώστε $f'(x)>-\frac{f(x)}{x}$, $x>0$
Να δείξετε ότι $f(x)>0$, $x>0$

18.119 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ ώστε $f'(x)>\frac{1}{x\cdot\ln x}$, $x>1$.
Να δείξετε ότι $f(3)-f(e)>\ln(\ln 3)$

18.120 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$
α) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης f .
β) Για κάθε $x<0$ να αποδείξετε ότι :
$f(5^x)+f(7^x)<f(6^x)+f(8^x)$ **(ΘΕΜΑ 2006 Ε)**

18.121 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση
β) Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(\eta\mu x)>f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)$
(ΘΕΜΑ 2016 Ε)

18.122 Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$

α) Να δείξετε ότι $\ln(x+1)>\frac{x}{x+1}$, $x>0$

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

γ) Να δείξετε ότι $f(x)>2^{f(x)}-1$, $x>0$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0 \quad \text{όπου } 0<\alpha<1$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x , μια στο (0 , 1) και μια στο (1 , 2) **(ΘΕΜΑ 2018 Ε)**

Δ. Επίλυση Ανισώσεων με Μονοτονία

18.123 Να λύσετε την ανίσωση: $e^{x-1}<1-\ln x$

18.124 Να λύσετε την : $e^{x}+2x<e^{-x}-x^{3}$

18.125 Να λύσετε την ανίσωση :

$e^{\alpha}-e^{\beta}+\alpha-\beta<\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha$

18.126 Να λυθεί η ανίσωση : $x-1\le\frac{\eta\mu x^2-\eta\mu x^3}{3x^2}$

18.127 α) Να μελετηθεί ως προς μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x}$

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda>0$: $\ln\frac{\lambda}{2}>e^{2}-e^{\lambda}$

18.128 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^{3}(x)+f(x)=e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να λυθεί η ανίσωση: $f(2^{x}+x)-f(4-x^{3})<0$

18.129 Δίνεται η $f(x)=\ln(x^2+1)-2x$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να λύσετε την ανίσωση : $f\big(f(x)\big)<0$

18.130 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-x$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\le x+6$

ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+10}>x^2+3x-10$

iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}<\sigma\upsilon\nu x-x-1$

18.131 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x}<e^{\frac{x-1}{x+1}}$, $x>0$.

18.132 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-1$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της fof

γ) Να λύσετε την ανίσωση $(fof)(x)-f(x)\le 0$.

18.133 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^{x}$

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να λύσετε την ανίσωση

$\left(\frac{4}{3}\right)^{x^2}-\left(\frac{4}{3}\right)^{2-x}>(2-x)^{3}-x^{6}$

18.134 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x\cdot f'(x)=x+1$, $x>0$, $f(1)=1$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f

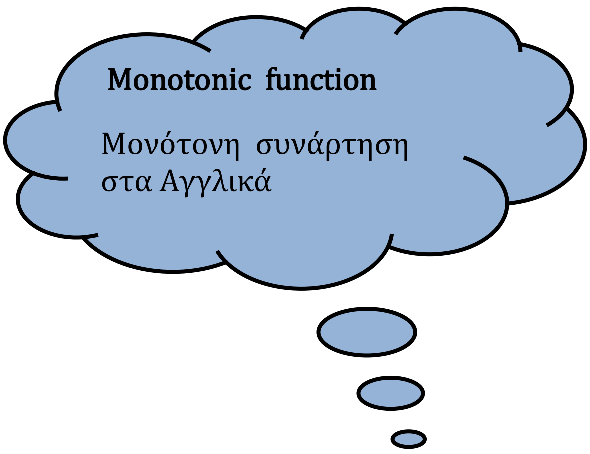
γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln\frac{x^2+x+1}{x^2+2}\ge 1-x$

18.135 Να λυθεί η ανίσωση

$f(5(x^2+1)^3-8)\le f(8(x^2+1)^2)$

αν $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$ γνησίως αύξουσα .

(ΘΕΜΑ 2013 Ε)



19. Ακρότατα Συνάρτησης

Ο **Πιερ Ντε Φερμά(1601-1665)** ήταν Γάλλος Νομικός και ερασιτέχνης Μαθηματικός. Μαζί με τον **Ρενέ Ντεκάρτ(1596-1650)**, ο Fermat θεωρείται ένας από τους δύο κορυφαίους Μαθηματικούς του πρώτου μισού του 17ου αιώνα.

Α. Εύρεση Ακροτάτων Συνάρτησης

19.1 Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία και τις θέσεις των πιθανών ακροτάτων των συναρτήσεων :
α) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$
β) $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$, $x \in [0,2]$

19.2 Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία και τις θέσεις των πιθανών ακροτάτων των συναρτήσεων :
α) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ β) $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

19.3 Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία και τις θέσεις των πιθανών ακροτάτων της συνάρτησης :
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & x < 3 \\ 2x^3 - 15x^2 + 24x + 9, & x \geq 3 \end{cases}$$

19.4 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

19.5 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

19.6 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

19.7 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:
α) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ β) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
γ) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ **(Σχολικό)**

19.8 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 4x^2 + 1$

19.9 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = e^{2x} - 2x$

19.10 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:
α) $f(x) = e^x - x$ β) $f(x) = x^x$, $x > 0$ **(Σχολικό)**

19.11 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = e^{x^2 - x\cdot\ln x}$

19.12 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = (x-2)e^x$

19.13 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = e^x(x^2 - 7x + 13)$

19.14 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x^2(\ln x - 1)$

19.15 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x\ln x - 2x + e$

19.16 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = (x-3)e^x - \frac{x^2}{2} + 2x$

19.17 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = x^2 - 8\ln x$

19.18 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = 2\ln x - x^2$

19.19 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 5)$

19.20 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 9}{x^2 - 4}$

19.21 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 9}$

19.22 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = \dfrac{e^x}{x + 1}$

19.23 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = \dfrac{2x}{\ln x}$

19.24 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{e^x}$

19.25 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = \dfrac{\ln x^3 - x - 6}{x}$

19.26 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f στο $[-1, 3]$ με $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5$

19.27 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$, $x \in [-2, 2]$

19.28 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x+11}{x+1}$, $x \in [2, 8]$

19.29 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $x \in [1, 3]$

19.30 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

19.31 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

19.32 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$

19.33 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$

19.34 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = (2x-1)\ln x - x$

19.35 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = (x-1)\ln x$

19.36 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = e^x + x\ln x - (e+1)x$

19.37 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \ln x - e^{x-1} + 2$

19.38 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2\frac{\ln x}{x} + x$ δεν έχει ακρότατα

19.39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - |x|$ με $x \in [-1, 2]$. Να βρείτε :
α) τα κρίσιμα σημεία της f
β) τις πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων
γ) το σύνολο τιμών της f

19.40 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ με $g'(x) > 0, \forall x > 0$ και $g(e) = e$. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln g(x)}{g(x)}$

19.41 Δίνεται η παραγωγίσιμη $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $f'(x) - f(x) = 2xe^x$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2e^x$
β) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

19.42 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$
α) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

19.43 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = x^3 + 2x - 5$, $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

19.44 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

19.45 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 3f(x) = x^3 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

19.46 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 3f(x) = \ln x - x + 1$, $x > 0$.
Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα για $x > 0$

19.47 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f''(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Αν η συνάρτηση f δεν είναι 1-1 , να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο .

19.48 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) - (x-3)e^{f(x)} = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το $f(3)$ είναι τοπικό ελάχιστο αυτής .

19.49 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης
$$f(x) = \begin{cases} x^2\ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

19.50 Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις :
α) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ e^{1-x}, & x > 1 \end{cases}$
β) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x < 1 \\ x^2 - 4x + 3, & x \ge 1 \end{cases}$ **(Σχολικό)**

19.51 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ -\ln x, & x \ge 1 \end{cases}$$

19.52 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης
$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4\,, & x \le 2 \\ x^2 - 6x + 8\,, & x > 2 \end{cases}$

19.53 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης
$f(x) = \begin{cases} \ln x - x^2 + 2\,, & x \ge 1 \\ x^2 + 2x - 2\,, & x < 1 \end{cases}$

19.54 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ με $\beta^2 < 3\gamma\,, x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.
β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .
(ΘΕΜΑ 2001)

19.55 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης
$f(x) = \ln(e^x - x)$ **(ΘΕΜΑ 2011)**

19.56 Δίνεται παραγωγίσιμη $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύουν :
− Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
− $f(1) = 1$
− $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$
Να αποδείξετε ότι :
α) $f'(1) = 0$
β) Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$
(ΘΕΜΑ 2013)

19.57 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης
$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ **(ΘΕΜΑ 2016)**

19.58 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης
$f(x) = x - \dfrac{4}{x^2}$ **(ΘΕΜΑ 2018)**

19.59 Δίνεται η $f : [0\,, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2\eta\mu x - x$
Να βρείτε τα ακρότατα της f (ολικά και τοπικά)
(ΘΕΜΑ 2018Ε)

Β. Εύρεση Παραμέτρων

19.60 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha\,, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$. Στη συνέχεια να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων **(Σχολικό)**

19.61 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha\,, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 12x + 1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x = 1$ και $x = 2$. Στη συνέχεια να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων

19.62 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha\,, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta \ln x$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x = 1$ και $x = 3$. Στη συνέχεια να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.

19.63 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha\,, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 12x - 7$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x = -2$ και $x = 1$. Στη συνέχεια να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων

19.64 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha\,, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 3x + 4$ παρουσιάζει ακρότατο στο 1 με τιμή ίση με 2 .

19.65 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha\,, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = 2\alpha \ln x + \beta x^2 + 3x + 2$ παρουσιάζει ακρότατο στο 1 το 3.

19.66 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha\,, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = 2\alpha \ln x - \dfrac{\beta}{x} + 3\alpha$ παρουσιάζει ακρότατο στο 1 το 5.

19.67 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha\,, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = (\alpha x + \beta) \cdot e^x$ παρουσιάζει ακρότατο στο 1 με τιμή ίση με $-e$, για $x \ge 0$.

19.68 Δίνεται η $f(x) = \alpha \ln x + x^2 + \beta x + 2$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha\,, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το $x = 3$ είναι κρίσιμο σημείο της f και η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $K(1, f(1))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $x = 2y$

19.69 Δίνεται η $f(x) = \alpha \ln x - x^2\,, \alpha \in \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x = 1$.
α) Να βρείτε την τιμή του α
β) Να λύσετε την ανίσωση :
$(3|x| + 1)^2 - (|x| + 9)^2 < 2 \ln \dfrac{3|x| + 1}{|x| + 9}$

Γ. Ανισώσεις και Ακρότατα

19.70 Να αποδείξετε ότι: $x^2 \geq 1 + 2\ln x \ ,\ x > 0$

19.71 Να αποδείξετε ότι: $x^2 \geq x + \ln x \ ,\ x > 0$

19.72 Να αποδείξετε ότι: $\ln x \leq x - 1 \ ,\ x > 0$

19.73 Να αποδείξετε ότι: $\ln x \leq ex - 2 \ ,\ x > 0$

19.74 Να αποδείξετε ότι: $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x} \ , x > 0$

19.75 Να δείξετε ότι: $\ln(1 + x) \geq \frac{x}{1 + x} \ , x > -1$

19.76 Να αποδείξετε ότι: $e^{x-1} \geq 1 + \ln x$

19.77 Να δείξετε ότι: $2x^2 \ln x \geq 3x^2 - e^2 \ , x > 0$

19.78 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x - 4x^2 + 1$
α) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
β) Να δείξετε ότι εξίσωση $\ln x = 2x^2 - \frac{1}{2}$ είναι αδύνατη

19.79 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln x + 2$
α) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
β) Να δείξετε ότι εξίσωση $x \cdot e^{\frac{2}{x}} = 1$ είναι αδύνατη

19.80 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2}{e^{-x}}$
α) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
β) Να δείξετε ότι $x^2 \leq 8e^{x-2} \ , x > 0$

19.81 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$
α) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
β) Να δείξετε ότι $e^{x-1} \geq x \ , x > 0$

19.82 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{x}} \ ,\ x > 0$.
α) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .
β) Να δείξετε ότι

$$\forall \alpha, \beta, \gamma > 0 : \ \frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha}} + \beta^{\frac{1}{\beta}} + \gamma^{\frac{1}{\gamma}}}{3} \leq e^{\frac{1}{e}}$$

19.83 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.
α) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .
β) Να δείξετε ότι $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1 \ ,\ x > 0$

19.84 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 3f(x) = e^{2x} - 2x - 5 \ , x \in \mathbb{R}$
α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
β) Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1 \ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$

19.85 Δίνεται η παραγωγίσιμη $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε $xf'(x) + 2f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $f(1) = 0$
α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$
β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f
γ) Να δείξετε ότι $x^{2e} \leq e^{x^2} \ , x > 0$

19.86 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
β) Να δείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1 + x) \ ,\ x \in \mathbb{R}$.
(ΘΕΜΑ 2003)

19.87 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e\ln x$.
Να δείξετε ότι $f(x) \geq e, \forall\, x > 0$ **(ΘΕΜΑ 2007 Ε)**

19.88 Δίνεται η $f(x) = x^2 - 2\ln x \ ,\ x > 0$.
Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1 \ ,\ x > 0$
(ΘΕΜΑ 2008 Ε)

19.89 Να λυθεί η εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$.
(ΘΕΜΑ 2016)

19.90 Δίνεται η $f(x) = -\eta\mu x \ , x \in [0, \pi]$
Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες που άγονται από το $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, τις οποίες και να βρείτε. **(ΘΕΜΑ 2017)**

Δ. Από Ανίσωση σε Ισότητα

19.91 Αν για $x > 0$ ισχύει $x^2 + x \geq 2 + \alpha\ln x$
Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

19.92 Αν ισχύει $e^x \geq \alpha x + 1 \ ,\ \alpha \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε την τιμή του α

19.93 Αν για $x > 0$ ισχύει $x^3 \geq x^2 + \alpha \ln x, \alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του α.

19.94 Αν για $x > 0$ ισχύει $\alpha \ln x \leq x - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του α.

19.95 Αν για $x > 0$ ισχύει $\ln x + \frac{2\alpha}{x+1} \geq \alpha x^2$
Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

19.96 Δίνεται συνάρτηση f με $f'(x) \neq 0,\ x \in \mathbb{R}$
Αν ισχύει $e^{f(x)} \geq \alpha f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}, f(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

19.97 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $e^{f(x)} \geq (\alpha - 2)f(x) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) \forall x \in \mathbb{R}, f(1) = 0$
Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ ή ότι η f παρουσιάζει ένα κρίσιμο σημείο.

19.98 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) \leq e^x + \ln(x^2 + 1), \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, 1)$

19.99 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) \geq x^2 + \eta\mu x, \forall x \in \mathbb{R}, f(0) = 0$
Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$

19.100 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$, $2f(x) - x^2 \leq 2\ln x + 1$, $x > 0$.
Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 3$.

19.100 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $(1) = 1$, $f(e^x) \leq x^2 + 1$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$

19.101 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x^2 - x + 1) - f(1) \geq x - x^2, x > 0$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x$

19.102 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 3$,
$f(x) + g(x) \leq x^3 + x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.
Αν η εφαπτομένη της C_g στο $M(1, g(1))$ έχει εξίσωση $y = 3x + 1$, τότε να βρείτε:
α) τις τιμές $g(1), g'(1)$.
β) την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $B(1, f(1))$

10.103 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
οι C_f, C_g τέμνονται στο μηδέν
$f(x) + e^x \geq g(x) + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτόμενη στο μηδέν.

19.104 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, τρεις φορές παραγωγίσιμη, με $f(1) = f(2) = 0$.
Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, 2): f'''(\xi) = 0$

19.105 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$
(ΘΕΜΑ 2004 Ε)

19.106 Δίνεται η συνάρτηση
$f(x) = \alpha^x - \ln(x + 1)$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.
Αν ισχύει $f(x) \geq 1$, για $x > -1$ να βρείτε το α
(ΘΕΜΑ 2009)

Ε. Πλήθος Ριζών – Σύνολο Τιμών

19.107 Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

19.108 Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 1 + e^{-x^2}$

19.109 Δίνεται συνάρτηση $f: [-1, 5] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$. Να βρείτε:
α) την μονοτονία και τα ακρότατα της f
β) το σύνολο τιμών της f

19.110 Δίνεται η $f(x) = x^3 - 3x + 2, x \in [-2, 0]$.
Να βρείτε:
α) τα κρίσιμα σημεία της f
β) τα ακρότατα της f καθώς και το σύνολο τιμών

19.111 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x + x^2 - 3x + 12 = 0$

19.112 Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ έχει ακριβώς 3 πραγματικές ρίζες.

19.113 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2x^3 - 6x + 1 = 0$.

19.114 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3 - 3x + \alpha = 0$.

19.115 Δίνεται η $f(x) = 1 - e^{2x} \cdot (1 + 2x)$.
Να βρείτε :
α) τα ακρότατα της f
β) το σύνολο τιμών της f
γ) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης
$2x = e^{-2x} - 1$

19.116 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x + 1$
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = 2$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

19.117 Δίνεται η $f(x) = (x - 1) \cdot \ln x - 1$
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2018}$, έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες

19.118 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης
$1 + 2018 \cdot x = \ln x$

19.119 Δίνεται η παραγωγίσιμη $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $f'(x) + f(x) = e^{-x}$.
α) Να βρείτε τον τύπο της f
β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης
$x - 2018 \cdot e^x = 0$

19.120 Δίνεται η παραγωγίσιμη $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = \ln(e + 1)$, $f'(x) + e^{-x - f(x)} = 0$
α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln\left(e + e^{-x}\right)$
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφή της.
δ) Αν $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι
$f(\alpha) + f(\beta + 1) > f(\beta) + f(\alpha + 1)$

19.121 Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^2 \ln x$ **(ΘΕΜΑ 2004)**

19.122 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1} - \ln x$.
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες. **(ΘΕΜΑ 2006)**

19.123 Δίνεται η $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$, $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ μια σταθερά.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες. **(ΘΕΜΑ 2007)**

19.124 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 .
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
(ΘΕΜΑ 2008)

19.125 Δίνεται η $f(x) = \ln(x + 1) - \ln(x + 2)$.
Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
(ΘΕΜΑ 2009 Ε)

19.126 Δίνεται η $f(x) = (x - 2)\ln x + x - 3$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες. **(ΘΕΜΑ 2010 Ε)**

19.127 Δίνεται η $f(x) = (x - 1)\ln x - 1$, $x > 0$.
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$ έχει ακριβώς 2 θετικές ρίζες . **(ΘΕΜΑ 2012)**

19.128 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{\ln x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 .
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f
(ΘΕΜΑ 2014 Ε)

19.129 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(e^{3-x}(x^2 + 1)\right) = \frac{e^2}{5}$ έχει ακριβώς μια ρίζα.
(ΘΕΜΑ 2015)

19.130 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x$.
Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
(ΘΕΜΑ 2015 Ε)

19.131 Δίνεται η συνεχής $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\ge 1 \\ e^{x-1}+x, & x<1 \end{cases}$
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική .
γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_0 f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$ **(ΘΕΜΑ 2019)**

Ζ. Συνδυαστικές Ασκήσεις στα Ακρότατα

19.132 Δίνεται η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με
$f(x)>0$, $(f'(x))^2\neq f(x)f''(x)$.
Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln f(x)$ έχει το πολύ ένα ακρότατο .

19.133 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) . Αν η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $[-1,2]$ και $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=1$ να δείξετε ότι :
α) $\exists\, x_1, x_2\in(\alpha,\beta): f'(x_1)=f'(x_2)=0$.
β) Η εξίσωση $f'(x)=(x^2+1)f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) αν η f' είναι συνεχής

19.134 Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ με $f(2)<f(1)<f(4)<f(3)$.
Να αποδείξετε ότι :
α) η συνάρτηση f παρουσιάζει ένα ολικό ελάχιστο και ένα ολικό μέγιστο
β) $\exists\, x_0\in(1,4): f''(x_0)=0$

19.135 Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ με $f(1)<f(0)<f(3)<f(2)$
Να αποδείξετε ότι : $\exists\, x_0\in(0,3): f''(x_0)=0$

19.136 Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και $\gamma,\delta\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\gamma)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\delta)$
Αν η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη , να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α,β) .

19.137 Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,3]$ με $f(1)=2$ και $f(3)=4$ και σύνολο τιμών το $[-1,5]$.
Να δείξετε :
α) $\exists\, x_1, x_2\in(1,3): f'(x_1)=f'(x_2)=0$
β) $\exists\, x_0\in(1,3): f''(x_0)=0$

19.138 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη ώστε να ισχύει $2f(x)\ge f(1)+f(2)$, με $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :
α) $f(1)=f(2)$
β) $\exists\, x_0\in(1,2): f'''(x_0)=0$.
γ) η εξίσωση $f''(x)=f'(x)$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο $(1,2)$.

19.139 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη ώστε να ισχύει $2f(x)\ge f(3)+f(4)$, $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :
α) $f(3)=f(4)$
β) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(3,4)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της $C_{f''}$ στο σημείο $M(\xi, f''(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα x’x

19.140 Έστω η συνάρτηση $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε
$f(2)<f(1)<f(4)<f(3)$. Να δείξετε ότι :
α) η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $(1,4)$.
β) η εξίσωση $f''(x)+2xf'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1,4)$.

19.141 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)\le 2-x+\dfrac{f(1)+f(3)}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι:
α) $f(1)-f(3)=2$.
β) η εξίσωση $f'(x)=-1$ έχει τουλάχιστον τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες .

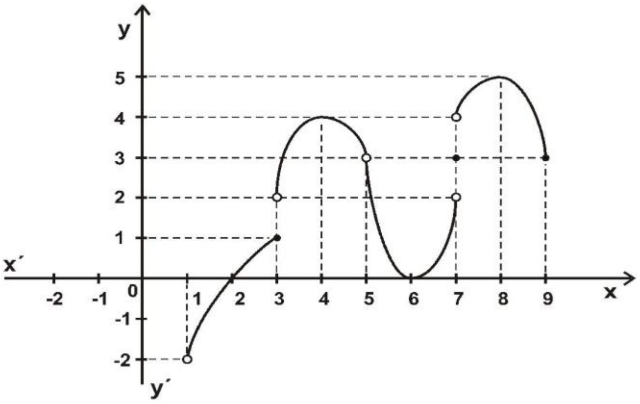
19.142 Έστω η συνάρτηση $f:[1,4]\to\mathbb{R}$, με συνεχή f' στο $[1,4]$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $[-3,2]$ και $f(1)=-2$, $f(4)=1$.
Να αποδείξετε ότι :
α) υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f κάθετη στην ευθεία $\zeta: 2x+2y-2020=0$.
β) η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $(1,4)$.
γ) η εξίσωση $f'(x)=(e^x+x^2)\cdot f(x)$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1,4)$.

19.143 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε να ισχύει
$f(1)=f(3)$, $f''(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό τοπικό ακρότατο , του οποίου να βρείτε το είδος .

19.144 Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η εφαπτόμενη της C_f στο $A(4, f(4))$ είναι κάθετη στην ευθεία ε: $3y = -x + 2$. Επιπλέον ισχύει $f(e^x) \le x^3 + 2x^2 + f(1)$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :
α) η εφαπτόμενη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα x'x
β) η εξίσωση $f''(x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 4)$.

19.145 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο ώστε να ισχύει $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ $x \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 1$. Να δείξετε ότι :
α) η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$
β) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
(ΘΕΜΑ 2016)

19.146 Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
β)Να βρείτε , αν υπάρχουν , τα όρια :
$\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 3} f(x)$, $\lim_{x\to 5} f(x)$, $\lim_{x\to 7} f(x)$, $\lim_{x\to 9} f(x)$
γ) Να βρείτε , αν υπάρχουν , τα όρια :
$\lim_{x\to 2} \frac{1}{f(x)}$, $\lim_{x\to 6} \frac{1}{f(x)}$, $\lim_{x\to 8} f\left(f(x)\right)$
δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής
ε) Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f ώστε να ισχύει $f'(x_0) = 0$
(ΘΕΜΑ 2016 Ε)

19.147 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$
α) Να αποδείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$ **(ΘΕΜΑ 2016 Ε)**

19.148 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \cdot ημx, & x \in [0, π] \end{cases}$
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[-1, π]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της
γ) Να λύσετε την εξίσωση
$16 \cdot e^{-\frac{3π}{4}} \cdot f(x) - e^{-\frac{3π}{4}} \cdot (4x - 3π)^2 = 8\sqrt{2}$
(ΘΕΜΑ 2017)

Η. Προβλήματα Μεγίστων – Ελαχίστων

19.149 Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με εμβαδόν 16 cm^2 να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου που έχει την μικρότερη περίμετρο .

19.150 Να αποδείξετε ότι από όλα τα οικόπεδα σχήματος ορθογωνίου με εμβαδόν 400 m^2, το τετράγωνο χρειάζεται την μικρότερη περίφραξη **(Σχολικό)**

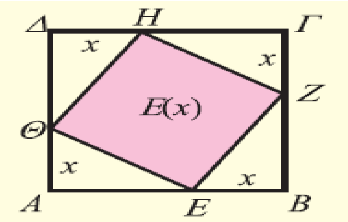
19.151 Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με περίμετρο 16 , να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν .

19.152 Με συρματόπλεγμα μήκους 80 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν **(Σχολικό)**

19.153 Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχει περίμετρο 400 m . Αν το μήκος του είναι x m , τότε να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο , καθώς και ποια είναι η μέγιστη τιμή του εμβαδού .

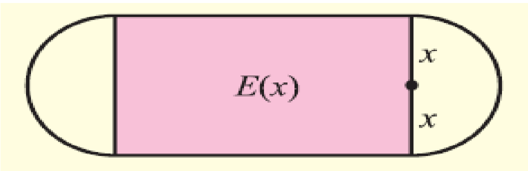
19.154 Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο 20 cm και μήκος x cm . Να βρείτε για ποια τιμή του x η διαγώνιος του παραλληλογράμμου έχει το ελάχιστο μήκος .

19.155 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με πλευρά 2 cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ, να βρείτε το x ώστε το εμβαδόν του ΕΖΗΘ να γίνει ελάχιστο. **(Σχολικό)**



19.156 Με ένα σύρμα μήκους 4 m κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x m και ένα τετράγωνο πλευράς y m . Να βρείτε:
α) το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων συναρτήσει της πλευράς x
β) για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο **(Σχολικό)**

19.157 Ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400 m , να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους του, να γίνεται μέγιστο .



(Σχολικό)

19.158 Μια ώρα μετά τη λήψη x mgr ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από την συνάρτηση $T(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$, $0 < x < 3$. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας να γίνει μέγιστος **(Σχολικό)**

19.159 Δίνονται τα σημεία $A(2\,,-\kappa)$, $B(\kappa+1\,,3)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του κ ώστε η απόσταση των σημείων να είναι ελάχιστη, καθώς και την απόσταση αυτή.

19.160 Δίνεται η $f(x) = e^{x^2-4\alpha x+16\alpha}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει ελάχιστη τιμή .
β) Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, η ελάχιστη τιμή της f γίνεται μέγιστη .

19.161 Δίνεται η $f(x) = 8\ln x + x^2 - 3x + 2$. Να βρείτε σε ποιο σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f , ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης γίνεται ελάχιστος .

19.162 Δίνεται η $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$. Να βρείτε σε ποιο σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f , ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης γίνεται μέγιστος .

19.163 Δίνεται η $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8x + 1$. Να βρείτε σε ποιο σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f , ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης γίνεται ελάχιστος

19.164 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2\ln x$. Να βρείτε για ποια τιμή του x, ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x , γίνεται ελάχιστος .

19.165 Δίνεται η $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 4$ της οποίας η C_f εφάπτεται στον άξονα x'x στο $A(-2\,,0)$
α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 3$
β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
γ) Να βρείτε σε ποιο σημείο Μ της C_f, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης γίνεται ελάχιστος

19.166 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ και το σημείο $A(2\,,0)$. Να βρείτε σημείο Μ της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.

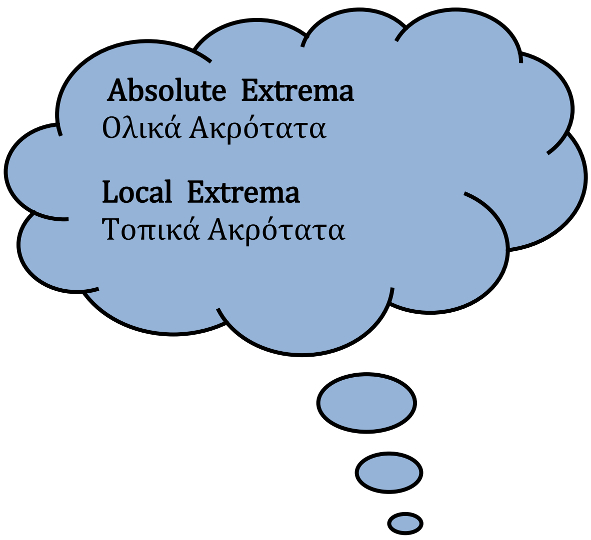
19.167 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A(\frac{9}{2}\,,0)$.
α) Να βρείτε σημείο Μ της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση
β) Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της C_f στο Μ είναι κάθετη στην ΑΜ **(Σχολικό)**

19.168 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$ και έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $A(2, f(2))$.
Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός σημείου $M(x, y)$ της εφαπτομένης (ε) έτσι ώστε η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων να γίνεται ελάχιστη .

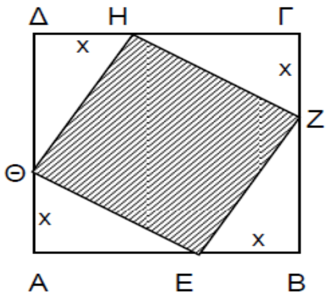
19.169 Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x) = x^2 + 50x + 100$ σε ευρώ με $0 \le x \le 150$.
Η είσπραξη από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος είναι $450 - x$ σε ευρώ . Να βρείτε την ημερήσια παραγωγή x του εργοστασίου για την οποία το κέρδος είναι μέγιστο και πόσο είναι αυτό

19.170 Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$ σε ευρώ με $6 \le x \le 50$. Η είσπραξη από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος είναι $420 - 2x$ σε ευρώ .
Να βρείτε την ημερήσια παραγωγή x του εργοστασίου για την οποία το κέρδος είναι μέγιστο και πόσο είναι αυτό

19.171 Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$ σε ευρώ με $0 \le x \le 105$. Η είσπραξη από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος είναι $420x - 2x^2$ σε ευρώ
Να βρείτε την ημερήσια παραγωγή x του εργοστασίου για την οποία το κέρδος είναι μέγιστο και πόσο είναι αυτό **(Σχολικό)**



19.172 Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm . Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ :



α) Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από την συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 4x + 4, 0 \le x \le 2$
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδό του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο
δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_0} + 1$ cm^2
(ΘΕΜΑ 2017 Ε)

19.173 Ένα σύρμα μήκους 8 m το κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.
α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι :

$$E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} \quad \text{με} \quad 0 < x < 8$$

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την διάμετρο του κύκλου
γ)·Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m , ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2 **(ΘΕΜΑ 2018)**

20. Κυρτότητα Συνάρτησης

Α. Εύρεση Κυρτότητας - Σημείων Καμπής

20.1 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2+x$

20.2 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x)=x^4+2x^3-12x^2-5x+4$

20.3 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x)=x^4-6x^2+7x-2$

20.4 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x)=x^4-4x^3$

20.5 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x)=\frac{x^4}{4}-6x^2$

20.6 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x)=x^2+\frac{8}{x}$

20.7 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$

20.8 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$

20.9 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ τις συναρτήσεις :
α) $f(x)=3x^5-5x^4+2$ β) $f(x)=\frac{3x^2-2}{x^3}$
(Σχολικό)

20.10 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. τις συναρτήσεις:
α) $f(x)=x\cdot e^{1-x}$ β) $f(x)=x^2\cdot(2\ln x-5)$
(Σχολικό)

20.11 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^{-x}$

20.12 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x)=(x+2)\cdot e^{-x}$

20.13 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2+4)$

20.14 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x)=e^x(x^2-4x+5)$

20.15 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x)=(x+1)\cdot\ln x$

20.16 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x)=x-2\ln x-\frac{1}{x}$

20.17 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. τις συναρτήσεις:
α) $f(x)=e^{-x^2}$ β) $f(x)=$ εφx , $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
(Σχολικό)

20.18 Να βρείτε τα σημεία καμπής της $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ και να δείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο **(Σχολικό)**

20.19 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x)=2x+x\cdot\ln x-e^{x-1}$

20.20 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x)=\ln^3 x$

20.21 Να αποδείξετε ότι $\forall\alpha\in(-2,2)$ η συνάρτηση $f(x)=x^4-2\alpha x^3+6x^2+2x+1$ είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$ **(Σχολικό)**

20.22 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x)=\begin{cases}-3x^2+1, & x<0\\ -x^3+3x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$
(Σχολικό)

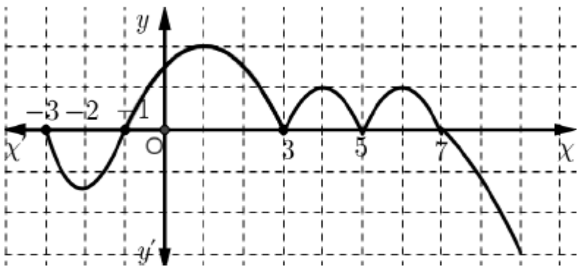
20.23 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x)=\begin{cases}-x^2+5, & x<0\\ -x^3+x^2+5, & x\geq 0\end{cases}$

20.24 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x)=\begin{cases}2x^3-9x^2+12x, & x<2\\ 2x^3-12x^2+12x, & x\geq 2\end{cases}$

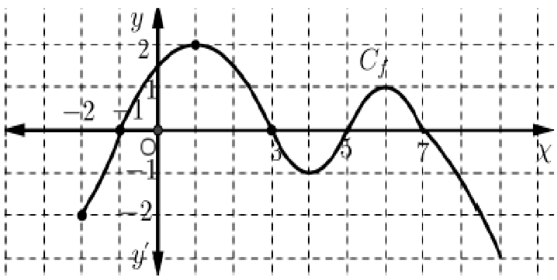
20.25 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f'(x)+f(x)=e^{-x}$. Να βρείτε :
α) τον τύπο της συνάρτησης
β) την μονοτονία και τα ακρότατα της f
γ) το σύνολο τιμών της f
δ) την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f

20.26 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(e)=e^2$ και $f'(x)=\frac{2f(x)}{x}-2x$, $x>0$
α) Να δείξετε ότι η $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}+2\ln x$, $x>0$ είναι σταθερή .
β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης
γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .

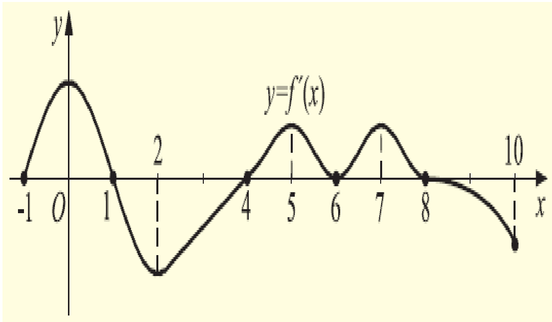
20.27 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f .
Να βρείτε :
α) τη μονοτονία και τα ακρότατα της f
β) την κυρτότητα και τα Σ.Κ. της f



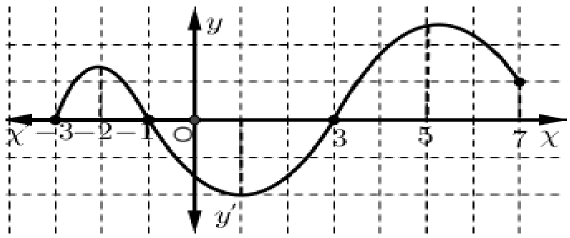
20.28 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f .
Να βρείτε :
α) τη μονοτονία και τα ακρότατα της f
β) την κυρτότητα και τα Σ.Κ. της f



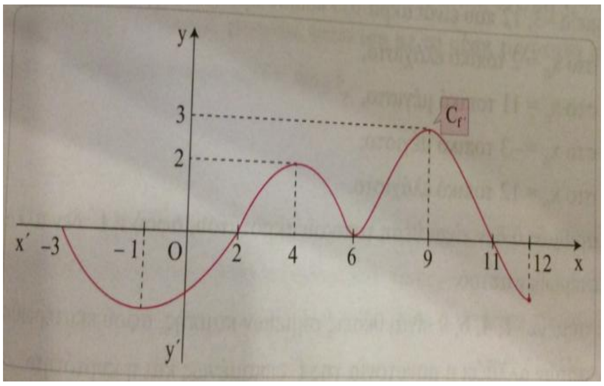
20.29 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f .
Να βρείτε :
α) τη μονοτονία και τα ακρότατα της f
β) την κυρτότητα και τα Σ.Κ. της f **(Σχολικό)**



20.30 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f .
Να βρείτε :
γ) τη μονοτονία και τα ακρότατα της f
δ) την κυρτότητα και τα Σ.Κ. της f



20.31 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f .
Να βρείτε :
α) τη μονοτονία και τα ακρότατα της f
β) την κυρτότητα και τα Σ.Κ. της f
γ) το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$
δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (4\,,9)$ τέτοιο ,ώστε: $f''(\xi) = \dfrac{1}{5}$



20.32 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $e^{f(x)} + f(x) = x\,, x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη .

20.33 Δίνεται η $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$Να δείξετε:
α) η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής
β) τα σημεία Α , Β , Γ με τετμημένες x_1 , x_2 τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 τη θέση του σημείου καμπής αντίστοιχα,
είναι συνευθειακά. **(Σχολικό)**

20.34 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$
(ΘΕΜΑ 2003)

20.35 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ **(ΘΕΜΑ 2006)**

20.36 Δίνεται η $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$, $\theta \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$ μια σταθερά .
Να δείξετε ότι η f έχει ένα σημείο καμπής .
(ΘΕΜΑ 2007)

20.37 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1)$
(ΘΕΜΑ 2009)

20.38 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2+1)$
(ΘΕΜΑ 2010)

20.39 Να δείξετε ότι η $f(x) = \ln(e^x - x)$ έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής . **(ΘΕΜΑ 2011)**

20.40 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = x - \ln(\, e^x + 1\,)$
(ΘΕΜΑ 2014)

20.41 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
(ΘΕΜΑ 2015)

20.42 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ **(ΘΕΜΑ 2016)**

20.43 Αν $f(x)= e^{x^2} - x^2 - 1$, να δείξετε ότι η f είναι κυρτή . **(ΘΕΜΑ 2016)**

20.44 Αν $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα , την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
(ΘΕΜΑ 2017)

20.45 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x) = x - \dfrac{4}{x^2}$ **(ΘΕΜΑ 2018)**

20.46 Δίνεται η $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2\,, \alpha > 1$.
Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής **(ΘΕΜΑ 2018)**

Β. Εύρεση Παραμέτρων στην Κυρτότητα

20.47 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 2\alpha x^2$.
Να βρείτε το α ώστε η f να έχει θέση σημείου καμπής στο 1

20.48 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$.
Να βρείτε τα α , β ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(-1\,,4)$

20.49 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$.
Να βρείτε τα α , β ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(1\,,0)$

20.50 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 - \ln^2 x + \beta$
Να βρείτε τα α , β ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(1\,,5)$

20.51 Δίνεται η $f(x) = x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 + 2$.
Να βρείτε τα α , β ώστε η C_f να έχει καμπή για $x = 1$ και $x = 2$

20.52 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 6x$
Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο -1 και καμπή στο $\frac{1}{2}$, να βρείτε τα α , β .

Γ. Κυρτότητα και Εφαπτομένη

20.53 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^4$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$
γ) Να δείξετε ότι $\frac{2017 + 2x - x^4}{e^{2x} + 2016} \leq 1$

20.54 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - x$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$
γ) Να δείξετε ότι $e^{2x} \geq 1 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$

20.55 Δίνεται $f : (-\infty\,,0] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = -1$
γ) Να δείξετε ότι $f(x) + 2e + 3ex \geq 0$

20.56 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x \cdot \ln x$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
γ) Να δείξετε ότι $f(x) - e \cdot x \geq x - 1$

20.57 Δίνεται η $f(x) = (x + \alpha \cdot \ln x)^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $A(1\,,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta : 8x - 2y + 2020 = 0$.
α) Να βρείτε τον αριθμό α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε)
β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
γ) Να δείξετε ότι $3 + (x + \ln x)^2 \geq 4x$, $x > 0$.

20.58 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + 1) \cdot \ln x$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
γ) Να δείξετε ότι $\frac{1}{2} \cdot \ln x < \frac{x - 1}{x + 1}$, $x \in (0\,,1)$

20.59 Δίνεται η $f(x) = (x^2 - 4x - 6)e^{x-1}$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
γ) Να δείξετε ότι $e^{x-1} \geq \frac{x + 2}{x^2 - 4x + 6}$, $x \in \mathbb{R}$.

20.60 Δίνεται η $f(x) = \ln(1 - x) + 5x - 2$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$
γ) Να δείξετε ότι $e^{-x} \geq 1 - x$

20.61 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x + e^x}$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$
γ) Να δείξετε ότι $e^{x + e^x - 1} \geq 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

20.62 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x) = x - \ln 4$

20.63 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - \ln x$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $x = e^{x^4 - 3x + 2}$

20.64 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3}{e^x}$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x) + 3x - 3) = 3$
δ) Να δείξετε ότι $\frac{x^2}{3} + 1 \geq (x - 1)e^x$

20.65 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-1} - x + 1$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
γ) Να δείξετε ότι $f(x) - x \geq 1$
δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

20.66 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - 3x}{x - 1} = 4$
α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
β) Αν η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x) - 7x + 4 \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$

20.67 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
γ) Να δείξετε ότι $\ln x \le \frac{1}{x} + 2x - 3$, $\forall x > 0$.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $x^x \cdot e^{3x - 2x^2 - 1} = 1$

20.68 Δίνεται παραγωγίσιμη $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και $f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}$, $\forall x > 0$
α) Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot \ln x$
β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x - 1$
ε) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x \cdot \ln x - x + 1}$

20.69 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x \cdot f(x) - x^2}{\sqrt{x^2+1} - 1} = 2$
α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f'(0)$
β) Να δείξετε ότι $f(x) \ge 2x$, $x \in \mathbb{R}$

20.70 Αν $f(x) = \ln\frac{1}{x}$ και $g(x) = x\ln\frac{1}{x}$ να δείξετε
α) Η C_f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και η C_g στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω
β) Οι C_f , C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτόμενη
γ) $x\ln\frac{1}{x} \le \ln\frac{1}{x}$, $x > 0$

20.71 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} , & x \ne 0 \\ 1 , & x = 0 \end{cases}$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\big(0 , f(0)\big)$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μια λύση. **(ΘΕΜΑ 2012 Ε)**

20.72 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0 , \pi]$ και $\varepsilon : y = x - \pi$ εφαπτομένη της.
Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{x - \eta\mu x}{\pi - x - \eta\mu x}$ **(ΘΕΜΑ 2017)**

20.73 Δίνεται η $f : [0 , \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2\eta\mu x - x$
Να αποδείξετε ότι $\forall x_0 \in [0 , \pi]$ η C_f και η εφαπτόμενη στο $A(x_0 , f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο **(ΘΕΜΑ 2018 Ε)**

Δ. Κυρτότητα και άλλα Θεωρήματα

20.74 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Αν η f είναι κοίλη, να δείξετε ότι
$2 f(x) > f(x + 1) + f(x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

20.75 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x\ln x$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
β) Να αποδείξετε ότι : $f(2x) + f(4x) > 2f(3x)$
γ) Να αποδείξετε ότι : $x^2 + \ln x \ge 4 - \frac{3}{x}$

20.76 Δίνεται συνάρτηση $f : [0 , 2] \to \mathbb{R}$ κυρτή και ισχύουν $f(0) = 0$, $f(1) = 1$
Να αποδείξετε ότι $f(2) > 2$

20.77 Δίνεται παραγωγίσιμη $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι κοίλη και $f(1) = f(2) = 0$. Να δείξετε ότι:
α) υπάρχει μοναδικός $\xi \in (1 , 2)$: $f'(\xi) = 0$
β) η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση ξ
γ) αν επιπλέον ισχύει $f'(1) = 1$,
να δείξετε ότι $f(\xi) < 1$

20.78 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Η f είναι κυρτή και η εφαπτομένη της C_f στο $A(0 , f(0))$ έχει εξίσωση $y = 2x + 4$
α) Να βρείτε τις τιμές $f'(0)$, $f(0)$
β) Να αποδείξετε ότι $f(-3) + f(3) > 8$
γ) Να αποδείξετε ότι $f(x + 2) - f(x) > 4$, $x > 0$

20.79 Έστω οι συναρτήσεις $f , g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f''(x) < -4f(x) + 4f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$
και $g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$
α) Να δείξετε ότι η g είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$
β) Αν η C_g εφάπτεται στον άξονα x'x
να δείξετε ότι $f(x) \le 0$, $x \in \mathbb{R}$.

20.80 Αν η f είναι κυρτή και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι :
α) υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$: $f'(\xi) > 0$
β) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

20.81 Δίνεται η $f(x) = \ln(x + 1) + x - 1$
Να δείξετε ότι :
α) Η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη
β) $f(5x) + 2 f(2x) > 3f(3x)$, $x > 0$
γ) υπάρχει μοναδικό $\xi \in (3\alpha , 5\alpha)$ με $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε $f(5\alpha) + 2 f(2\alpha) = 3f(\xi)$

20.82 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και
$(x^2+1)^2 f'(x) = x(2-x) + (x^2+1)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

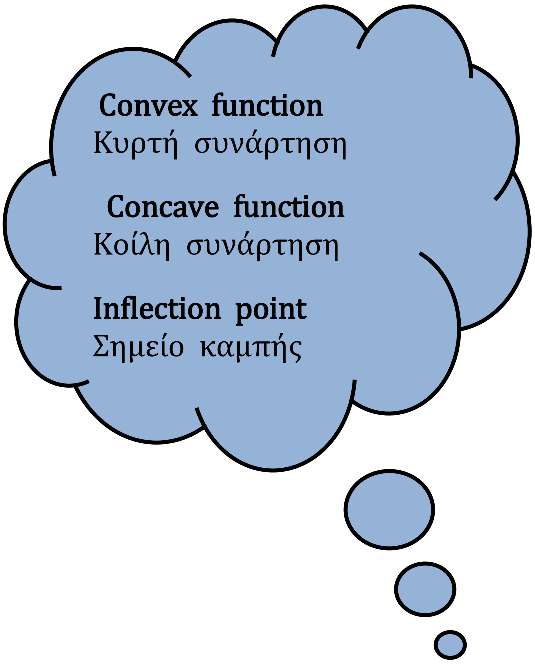
α) Να δείξετε ότι $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε
$f(\xi^2-\xi) = (1-\xi)(2\xi-1)f'(\xi^2-\xi)$



20.83 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x - x$

α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1} = \dfrac{1}{x}$

γ) Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της C_f προς την ευθεία $\delta: x + y + 1 = 0$, καθώς και την ελάχιστη απόσταση των σημείων της C_f από την ευθεία (δ).

20.84 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 4f(x) = 4x$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο

β) Να ορίσετε την αντίστροφη

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

δ) Να λύσετε την ανίσωση
$f^{-1}(e^{1-x} - x + 2) + e^{1-x} < 6 + x$

20.85 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο

β) Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x}{f(x) - x}$

21. Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

21.1 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

21.2 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

21.3 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση **(Σχολικό)**

21.4 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση **(Σχολικό)**

21.5 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x + 1}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση .

21.6 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

21.7 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση **(Σχολικό)**

21.8 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση . **(Σχολικό)**

21.9 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση .

21.10 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση . **(Σχολικό)**

21.11 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1 + 2\ln x}{x}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

21.12 Να μελετήσετε την $f(x) = x + \eta\mu x$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ **(Σχολικό)**

21.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha x^2 + \beta x + 4}{x - 1}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ στην ευθεία $y = -x + 2$

α) Να βρείτε τα α, β

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση .

21.14 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha x^2 + \beta x + 9}{x - 1}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ στην ευθεία $y = 2x - 7$

α) Να βρείτε τα α, β

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση .

21.15 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f(\sqrt{3}) = 2, 2xf(x) + x^2 f'(x) = -3f'(x), x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση .

21.16 Αν για την $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύουν $f''(x) = -\dfrac{2}{x^2}$, $\lim\limits_{x \to e} f(x) = -e$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

21.17 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα .

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

(ΘΕΜΑ 2016)

21.18 Αν $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα , την κυρτότητα και τα σημεία καμπής , να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες και να κάνετε την γραφική της παράσταση
(ΘΕΜΑ 2017)

Graph of a function
Γραφική Παράσταση συνάρτησης

21.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \dfrac{4}{x^2}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα .
β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .
γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f
δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση
(ΘΕΜΑ 2018)

21.20 Δίνεται η συνεχής $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & , \quad x > 1 \\ x^2 + 1 & , \quad x \le 1 \end{cases}$

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση **(ΘΕΜΑ 2018Ε)**

22. Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Οι αρχές της ολοκλήρωσης διατυπώθηκαν από **Νεύτωνα** και **Λάιμπνιτς** στο τέλος του 17ου αιώνα.
Ένας αυστηρός μαθηματικός ορισμός του ολοκληρώματος δόθηκε από τον Γερμανό μαθηματικό **Μπέρναρντ Ρίμαν(1826-1866)**

Α. Υπολογισμός Βασικών Ολοκληρωμάτων

22.1 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_1^2 (x^2-4x+3)dx$ β) $\int_{-2}^{1}(3x^2-4x)dx$

γ) $\int_{-2}^{-1}(4x^3-6x^2+2x)dx$ δ) $\int_4^9 \sqrt{x}\,dx$

22.2 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 (e^x+x)dx$ β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x)\,dx$

γ) $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}}\,dx$ δ) $\int_{-1}^{2} 12x(x-1)^2\,dx$

22.3 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^x+2\eta\mu x)dx$ β. $\int_1^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{\eta\mu^2 x}\right)dx$

γ. $\int_1^2\left(3^x-\frac{5}{x^2}\right)dx$ δ. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)dx$

22.4 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α. $\int_0^1 (3x^2-x-1)dx$ β. $\int_0^1(-\eta\mu\pi x+e^x)\,dx$

γ. $\int_1^2\left(2^x+\frac{3x+2}{x^2}\right)dx$ δ. $\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx$

22.5 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α. $\int_0^1 2^x\cdot e^x dx$ β. $\int_0^1 xe^{x^2}dx$

γ. $\int_0^1(e^x-e^{-x})dx$ δ. $\int_1^4\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\,dx$

22.6 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_1^2 \frac{x^2+x-1}{x}\,dx$ β) $\int_1^2\frac{x^3-5x^2+1}{x}\,dx$

γ) $\int_1^2\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{x^2}\,dx$ δ) $\int_0^4\frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

22.7 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_{-1}^{2}(x+1)e^x\,dx$ β) $\int_0^{\pi}(2x\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu x)\,dx$

γ) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^3}\,dx$ δ) $\int_1^2\frac{xe^x-2e^x}{x^3}\,dx$

22.8 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)dx$ β. $\int_0^1 x^2e^x(x+3)dx$

γ. $\int_{\pi}^{2\pi}\left(\ln x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\frac{\eta\mu x}{x}\right)dx$ δ. $\int_0^1 xe^x(2+x)\,dx$

22.9 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2x\,\eta\mu x-x^2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}\,dx$ β) $\int_0^{\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{e^x}\,dx$

γ) $\int_1^e\frac{1-\ln x}{x^2}\,dx$ δ) $\int_2^e\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\,dx$

22.10 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\,dx$ β) $\int_1^e\frac{\ln x}{x}\,dx$

γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{\eta\mu x+3}}\,dx$ δ) $\int_2^e\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$

Το σύμβολο της ολοκλήρωσης είναι ένα επίμηκες S
Το S σημαίνει άθροισμα, από την Λατινική λέξη sum

Β. Υπολογισμός Ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$

22.11 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_4^5 \frac{1}{2x-6}\,dx$ β) $\int_0^1 \frac{e^x+2x}{e^x+x^2}\,dx$

γ) $\int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$

22.12 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$ β) $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$

γ) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$

22.13 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_3^4 \frac{2x-5}{x^2-3x+2}\,dx$ β) $\int_4^5 \frac{2}{x^2-2x-3}\,dx$

22.14 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_3^4 \frac{1}{x^2-4}\,dx$ β) $\int_2^3 \frac{2x-3}{x^2-x}\,dx$

22.15 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx$ β) $\int_0^1 \frac{4x-1}{2x^2-x-3}\,dx$

22.16 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_{-1}^0 \frac{2x+1}{x^2-4x+3}\,dx$ β) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx$

22.17 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_3^4 \frac{4}{x^3-4x}\,dx$ β) $\int_1^2 \frac{1}{x\cdot(x+1)}\,dx$

22.18 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 \frac{x-2}{x+3}\,dx$ β) $\int_2^3 \frac{3x-1}{x-1}\,dx$

22.19 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{x-1}\,dx$ β) $\int_{-1}^0 \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}\,dx$

22.20 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_3^4 \frac{x^3-3x^2+5x-5}{x^2-3x+2}\,dx$

β) $\int_5^6 \frac{2x^3-5x^2-16x+22}{x^2-2x-8}\,dx$

22.21 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_2^3 \frac{x^3+x^2-2x-1}{x^2-x}\,dx$ β) $\int_2^3 \frac{x^2-x-2}{x+3}\,dx$

22.22 Να βρεθούν τα ολοκληρώματα

α) $\int_{-1}^0 \frac{3x-5}{x^2-3x+2}\,dx$ β) $\int_1^2 \frac{6x-5}{3x-2}\,dx$

γ) $\int_0^{\pi} \frac{1-\eta\mu\,x}{x+\sigma\upsilon\nu\,x}\,dx$

22.23 Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\int_0^{\alpha} \frac{e^x+1}{e^x+x}\,dx-\alpha\right)$$

Definite integral
Ορισμένο Ολοκλήρωμα
στα Αγγλικά

Γ. Παραγοντική Ολοκλήρωση

22.24 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_1^2 (x^2-3x)e^x\,dx$ β) $\int_0^1 \frac{x^2+x}{e^x}\,dx$

22.25 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_1^2 x\cdot 5^x\,dx$ β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\eta\mu x\,dx$

22.26 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 x\cdot e^{-x}\,dx$ β) $\int_0^1 x^2\cdot e^{-x}\,dx$

22.27 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu 2x\,dx$ β) $\int_1^e x^3 \ln x\,dx$

22.28 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ β) $\int_1^e \ln^2 x\,dx$

22.29 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 \ln(x+1)dx$ β) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

22.30 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$ β) $\int_1^e (3x^2-2ex)\ln x\,dx$

22.31 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^{\pi} e^x \eta\mu x\,dx$ β) $\int_0^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{e^x}\,dx$

22.32 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x\,dx$ β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\eta\mu 2x\,dx$

22.33 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 (x^2+1)e^{2x}\,dx$ β) $\int_1^2 (2x+2)\ln x\,dx$

22.34 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$.
Να υπολογίσετε :

α) το ολοκλήρωμα $\int_0^{\alpha} f(x)dx$

β) το όριο $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha^2}\cdot\int_0^{\alpha} f(x)dx\right)$

22.35 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x\cdot\ln x$.
Να υπολογίσετε :

α) το ολοκλήρωμα $\int_1^{\alpha} f(x)dx$

β) το όριο $\lim\limits_{\alpha\to 1}\frac{\int_1^{\alpha} f(x)dx}{(\alpha-1)^2}$

22.36 α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$I(\alpha)=\int_{\alpha}^0 (2x^2-3x)e^x\,dx$

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)$

(ΘΕΜΑ 2004)

22.37 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 xe^{2x}\,dx$
(ΘΕΜΑ 2009 Ε)

Δ. Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση

22.38 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_1^2 (x-1)^3\,dx$ β) $\int_0^1 (x-1)^3(2x-1)dx$

22.39 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 (2x+1)^4\,dx$

β) $\int_{-1}^1 (x^2-x+2)^3(2x-1)dx$

22.40 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$ β) $\int_{\ln 3}^{3\ln 2} \sqrt{1+e^x}\,dx$

22.41 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$ β) $\int_{-1}^0 x\sqrt{1-x}\,dx$

22.42 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 \frac{1}{3x+1}\,dx$ β) $\int_1^2 e^{4x-8}\,dx$

22.43 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^2}\,dx$ β) $\int_0^3 e^{3x-9}\,dx$

22.44 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}\,dx$ β) $\int_1^3 \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x}\,dx$

22.45 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}\,dx$ β) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

22.46 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ β) $\int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x}dx$

22.47 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\eta\mu x)^4 \sigma\upsilon\nu x\,dx$ β) $\int_0^1 12(3x+1)^3dx$

22.48 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ β) $\int_1^e \frac{(\ln x)^{2017}}{x}\,dx$

22.49 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$ β) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$

γ) $\int_1^e \frac{\ln x}{x\cdot\sqrt{1+\ln x}}\,dx$

22.50 Να βρεθούν τα ολοκληρώματα

α) $\int_{-1}^{0} x(x+1)^7\,dx$ β) $\int_{-2}^{-1} x\sqrt{x+2}\,dx$

γ) $\int_{1}^{3} \frac{συν(\ln x)}{x}\,dx$

22.51 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_{e}^{2e} \frac{1}{x\cdot \ln^3 x}\,dx$ β) $\int_{0}^{1} \frac{x+3}{(x^2+6x)^5}\,dx$

22.52 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_{e}^{e^4} \frac{1+\ln x}{\sqrt{3+x\ln x}}\,dx$ β) $\int_{0}^{1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\,dx$

22.53 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής . Να δείξετε ότι :

α) $\int_{0}^{1} f(x-2)dx = \int_{-2}^{-1} f(x)dx$

β) $\int_{0}^{1} f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(x)dx$

22.54 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)+f(-x)=1$.

Να βρείτε το ολοκλήρωμα $A=\int_{-2}^{2} f(x)dx$

22.55 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\int_{0}^{4} f(x)dx = 9$. Να βρείτε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_{0}^{2} x\cdot f(x^2)dx$ β) $\int_{1}^{e^4} \frac{f(\ln x)}{x}\,dx$

22.56 Να αποδείξετε ότι :

α) $\int_{1}^{e} \frac{f(\ln x)}{x}\,dx = \int_{0}^{1} f(x)dx$

β) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x f(1-e^x)dx = \int_{-1}^{-2} f(x)dx$

22.57 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\int_{0}^{2}(x f'(x^2)+1)dx = 4$. Να δείξετε ότι

α) υπάρχει $ρ\in(0,4) : f'(ρ)=1$.

β) υπάρχει $ξ\in(0,4) : f'(ξ)=\frac{ξ}{2}$

22.58 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:[α,β]\to(0,+\infty)$ με συνεχή παράγωγο ώστε $f(α)=1$ και $f(β)=2$

Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{α}^{β} \frac{f'(x)}{f^2(x)+f(x)}\,dx$

22.59 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$\int_{-1}^{1} x\,[2x+\ln(x^2+1)]\,dx$ **(ΘΕΜΑ 2010)**

22.60 Δίνεται η $f:[0,π]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2ημx-x$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{π} f(x)\cdot συνx dx$

(ΘΕΜΑ 2018Ε)

Ε. Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος

22.61 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}2x+3\ , & x\le 1\\ 3x^2-6x+8\ , & x>1\end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής

β) Να βρείτε τα ολοκληρώματα $A=\int_{-4}^{-2} f(x)dx$, $B=\int_{2}^{4} f(x)dx$, $Γ=\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

22.62 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}2x+3\ , & x\le 0\\ e^x+2\ , & x>0\end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $A=\int_{-1}^{1} f(x)dx$

22.63 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}x\cdot e^x\ , & x\le 0\\ \ln(x+1)\ , & x>0\end{cases}$.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

22.64 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_{-2}^{2}(|x+1|+x-4)dx$

β) $\int_{-2}^{4}(3|x^2-2x-3|+4)dx$

22.65 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_{0}^{2}|x-1|dx$ β) $\int_{1}^{3}|x^2-4|dx$

γ) $\int_{0}^{1}\sqrt{x^2-8x+16}\,dx$

22.66 Να βρείτε το ολοκλήρωμα

$A=\int_{-1}^{1}|e^x+4x^3-1|dx$

22.67 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$.

γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα

$A=\int_{1}^{2}|f(x)-x+1|dx$

22.68 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α για τον οποίο ισχύει $\int_{-α}^{α}(4x+6)\,dx = 36$.

22.69 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίο ισχύει

$\int_{λ+3}^{λ^2+1}\frac{4x^2-3x-5}{x^2+4}\,dx + \int_{λ^2+1}^{λ+3}\frac{3x^2-3x-9}{x^2+4}\,dx = \int_{-1}^{1} 2\,dx$

22.70 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α για τον οποίο ισχύει

$$\int_1^3 \frac{e^x + x^3 - x}{x^2+1}dx = \int_{-3}^1 \alpha\, dx + \int_3^1 \frac{x^3 + 3x - e^x}{x^2+1} dx$$

22.71 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίο ισχύει

$$\int_\lambda^{3\lambda+2} \frac{\ln x + 6}{x^2+2}dx - \int_{-5}^4 2dx = \int_{3\lambda+2}^{\lambda} \frac{3x^2 - \ln x}{x^2+2}dx$$

22.72 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x \ , & x \le 1 \\ 2x - \beta \ , & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των α , β ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής και να ισχύει $\int_{-1}^2 f(x)dx = 9$

22.73 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} e^x + \alpha \ , & x \le 1 \\ \beta \cdot \frac{\ln x}{x} \ , & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των α , β ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής και να ισχύει $\int_0^e f(x)dx = 1$

22.74 Να δείξετε ότι :

$2\int_\alpha^\beta f(x)\cdot f'(x)dx = [f(\beta)]^2 - [f(\alpha)]^2$.

22.75 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ με συνεχή πρώτη παράγωγο ώστε $f(1) = 2$.
Να βρείτε τα ολοκληρώματα :

α) $A = \int_0^1 (f(x) + x\cdot f'(x))dx$

β) $B = \int_0^1 \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{x\cdot f'(x)}{f^2(x)}\right)dx$

22.76 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο ώστε να ισχύουν $f(1) = \frac{3}{e}$, $f(0) = 1$. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 e^x(f(x) + f'(x))dx$.

22.77 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο . Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,1)$ να βρείτε το ολοκλήρωμα

$\int_1^2 x\big(2f(x) + xf'(x)\big)dx$

22.78 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο ώστε $f(1) = 5$, $\int_0^1 f(x)dx = 2$.
Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 x f'(x)dx$

22.79 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο , για την οποία ισχύουν $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $A = \int_0^1 2x\cdot f(x)dx + \int_0^1 x^2\cdot f'(x)dx$

β) $B = \int_0^1 (f'(x) + x\cdot f''(x))dx$

γ) $\Gamma = \int_0^1 \left(f'(x)\cdot \ln(x+1) + \frac{f(x)}{x+1}\right)dx$

22.80 Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο ώστε $f(1) = \ln 2$.
Να βρείτε το ολοκλήρωμα

$I = \int_0^1 \big(1 + x\cdot f'(x)\big)\cdot e^{f(x)}dx$

22.81 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο , για την οποία ισχύουν $f(1) = 3$, $f'(1) = 2$ και $\int_0^1 f(x)dx = 5$. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 x^2 f''(x)dx$

22.82 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Οι εφαπτόμενες της C_f στα $A(1,2)$ και $B(3,9)$ τέμνονται στο σημείο $\Gamma(4,11)$. Να βρείτε :

α) τις τιμές $f'(1)$, $f'(3)$

β) το ολοκλήρωμα $\int_1^3 xf''(x)dx$

22.83 Δίνεται η $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 3x + 1$, $\alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_0^1 f(x)dx = \frac{15}{4}$

Να βρείτε :

α) τον πραγματικό αριθμό α

β) το ολοκλήρωμα $\int_1^3 \frac{f(x)}{f'(x)}dx$

22.84 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, για την οποία ισχύει $\int_{-1}^1 f(x)dx = 12$ ενώ η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 2x + 2$. Να βρείτε τις τιμές των α , β ,γ ∈ ℝ

22.85 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f(2) = e^3 f(1)$.
Να βρείτε το ολοκλήρωμα :

$A = \int_1^2 \frac{f'(x) + 4f(x)}{f(x)}dx$

22.86 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο ώστε
$f(1)=5$, $\int_1^2 (xf'(x)+f(x))dx=1$. Να βρείτε :
α) την τιμή $f(2)$
β) το ολοκλήρωμα $\int_1^2 x^2(\,3f(x)+xf'(x)\,)dx$

22.87 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια , ώστε $\int_0^1 (xf'(x)+2f(x))dx=0$
να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x)\,dx=-f(1)$

22.88 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια , ώστε $\int_0^1 f(x)dx=f(0)$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο , ώστε : $\int_0^1 xf'(x)\,dx=f'(\xi)$

22.89 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x)=-2f(x)$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο α και στο β , να δείξετε ότι
$\int_\alpha^\beta x^2f(x)dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)$

22.90 Έστω μια συνάρτηση g με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0,\pi]$.
Αν $g(\pi)=1$ και ισχύει
$\int_0^\pi [g(x)+g''(x)]\cdot \eta\mu\, x\,dx=3$, να βρείτε το $g(0)$

22.91 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f(0)=1$, $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=1$
Να βρείτε :
α) την τιμή $f(1)$
β) το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{2xf^2(x)+e^x f(x)-e^x f'(x)}{f^2(x)}\,dx$

22.92 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.
Να αποδείξετε ότι :
α) $f'(x)\sqrt{x^2+1}+f(x)=0$
β) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\ln(\sqrt{2}+1)$
(ΘΕΜΑ 2003 Ε)

22.93 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο , για την οποία ισχύει
$\int_0^1 e^x(f'(x)+f''(x))\,dx=3$ και ο ρυθμός μεταβολής της f στο $x_0=1$ είναι $\frac{2}{e}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $M(0,3)$

22.94 Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο . Να δείξετε ότι
$\exists\xi\in(0,1)$: $\int_0^1 xf''(x)dx=f'(1)-f'(\xi)$

22.95 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ με συνεχή παράγωγο , για την οποία ισχύει
$\int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=0$ με $\alpha<\beta$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (α,β)

22.96 Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και η C_f διέρχεται από τα $A(1,2)$, $B(0,3)$. Αν είναι $\int_0^1 xf''(x)dx=0$, τότε να αποδείξετε ότι :
α) η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$ σχηματίζει γωνία $\frac{3\pi}{4}$ με τον άξονα x'x
β) $\exists\xi\in(0,1)$: $f'(\xi)=f'(1)$

22.97 Δίνεται η παραγωγίσιμη $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ ώστε να ισχύει $f'(x)-f(x)=f^2(x)$, $\forall x\in[0,1]$
Αν είναι $f(1)=e^2f(0)$, να βρείτε το $\int_0^1 f(x)dx$

22.98 Αν μια συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0,\pi]$ με $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ και
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f''(x)+f(x)]\sigma\upsilon\nu x\,dx=0$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f στο 0 .

22.99 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=2$ και η C_f διέρχεται από το A(0,1). Αν $\int_0^2 (xf''(x)+3f'(x))\,dx=4$ τότε:
α) να βρείτε την τιμή $f(2)$
β) να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \frac{2f'(x)}{f^2(x)+2f(x)}\,dx$
γ) να δείξετε ότι $\exists\xi\in(0,2)$: $f'(\xi)=1$

22.100 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)=x+2\int_0^1 f(x)dx$, $x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε την f .

22.101 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)=2x+\int_0^2 f(x)dx$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την f.

22.102 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)=9x^2-\int_{-1}^1 2xf(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την f.

22.103 Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε να ισχύει $f(x)=\frac{1}{x}+2\int_1^2 t\,f(t)\,dt$, $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

22.104 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t)dt=f(x)+6$. Να βρείτε την f και το ολοκλήρωμα $\int_{2016}^{2014} f(x)dx$

22.105 Να βρείτε συνεχή $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_0^{\frac{\pi}{3}}ημx\cdot f(x)dx=f(x)+συνx, x\in\mathbb{R}$

22.106 Δίνεται η παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=2$, $f'(x)=f(x)-\int_0^1(f(x)-e^x)\,dx$. Να δείξετε ότι $f(x)=e^x+1$

22.107 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_0^1 e^{1-x}f(x)\,dx=f(x)+e^x$. Να βρείτε την f.

22.108 Δίνεται η παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)=e^{x-f(x)}$, $x\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει $\int_0^1 xe^{f(x)}\,dx=4$, να βρείτε την f

22.109 Δίνεται η συνεχής $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ώστε $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\cdot f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+2$, $f(x)>0$ Να βρείτε το ολοκλήρωμα $A=\int_0^1 f(x)dx$

22.110 Δίνεται η συνεχής $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ με $\int_0^1 f(x)\left(\int_0^1 f(x)dx\right)dx=2\int_0^1 f(x)dx+3$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 f(x)dx$

22.111 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{\int_0^1 f(x)dx}=\int_0^1(f(x)+3x^2)\,dx$ Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$.

22.112 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $e^{x\cdot\int_0^1 f(t)dt}+x^2-x\geq 1, x\in\mathbb{R}$ Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(t)dt$

22.113 Δίνεται η συνεχής $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)=(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dt-45$. Να δείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$.
(ΘΕΜΑ 2008)

22.114 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και άρτια συνάρτηση. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$
(ΘΕΜΑ 2016 Ε)

ΣΤ. Εύρεση Ολοκληρώματος Αντίστροφης

22.115 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$.

22.116 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x+3$
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^6 f^{-1}(x)dx$.

22.117 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+2x^3-3$
α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-3}^0 f^{-1}(x)dx$.

22.118 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x+1$
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης
β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f^{-1}(x)dx$.

22.119 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-1$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη
β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f^{-1}(x)dx$.

22.120 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^e f^{-1}(x)dx$.

22.121 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x$
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$.

22.122 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+2x-5$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη
β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{-4}^{e-3} f^{-1}(x)dx$.

22.123 Δίνεται η $f(x)=\ln x-x-e^x$, $x>1$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx$.

22.124 Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $[1,10]$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,8)$ και $B(10,13)$.
δείξετε ότι : $\int_1^{10} f(x)dx+\int_8^{13} f^{-1}(x)dx=122$

22.125 Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x)=x+\ln x, x>0$.
Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e+1} f(x)dx$

22.126 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη , που ικανοποιεί την σχέση $f^3(x)+f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να ορίσετε την αντίστροφη
γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^2 f(x)dx$

22.127 Δίνεται η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη , που ικανοποιεί την σχέση
$e^{f(x)}+f(x)=x+1, x\in\mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να ορίσετε την αντίστροφη
γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^e f(x)dx$

22.128 Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$f(\sqrt{e})=2,\ xf'(x)\ln x+f(x)=0$, $x>1$
α) Να βρείτε τον τύπο της f
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
γ) Να ορίσετε την αντίστροφη
δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln x}dx+\int_1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{x}}dx$$

22.129 Έστω $f(x)=2e^x+2x^3-x^2-2x-2$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης
δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^{2e-3} f^{-1}(x)dx$.

22.130 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-1$
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x-1)>x$
γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$
δ) Να υπολογίσετε το $\int_{f(1)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx$.

Ζ. Εύρεση Αναγωγικού Τύπου

Να

22.131 Αν $I_\nu=\int_1^e \ln^\nu x\,dx$ να δείξετε ότι $I_\nu+\nu\cdot I_{\nu-1}=e$.

22.132 Αν $I_\nu=\int_0^2 x^\nu e^x\,dx$ να δείξετε ότι $I_\nu=2\nu e^2-\nu\cdot I_{\nu-1}$, $\nu\geq 2$

22.133 Δίνεται το ολοκλήρωμα
$I_\nu=\int_0^\pi x^\nu \text{συν}x\,dx$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.
α) Να δείξετε ότι $I_\nu=-\nu\pi^{\nu-1}-\nu(\nu-1)I_{\nu-2}$ για κάθε $\nu\geq 4$
β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi x^5\text{συν}x\,dx$

Η. Ανισότητες και Ολοκληρώματα

22.134 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-x+1$.
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
β) Να δείξετε ότι $\int_1^2 x^x\,dx>e-1$

22.135 Να δείξετε ότι $2\leq e^4\int_0^2 e^{x^3-3x^2}dx\leq 2e^4$.

22.136 Να δείξετε ότι $1\leq\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx\leq\sqrt{2}$

22.137 Να δείξετε ότι $12\leq\int_0^4\sqrt{x^2+9}\,dx\leq\sqrt{20}$

22.138 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία .
β) Να δείξετε ότι $\dfrac{e-1}{e}\leq\int_0^1\dfrac{1}{x^2+1}dx\leq\dfrac{e-1}{2}$

22.139 Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e}$, $x > 0$

β) $\int_1^{17} x^e dx < \int_1^{17} e^x dx$

22.140 Να αποδείξετε ότι :

α) $\ln x \ge 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0$ β) $\int_1^2 x^x dx \ge e - 1$.

22.141 α) Να δείξετε ότι : $x^2\ln x + 2 > x$, $x > 1$

β) Να αποδείξετε ότι : $\int_2^4 x^2 \ln x dx > 2$

22.142 Να αποδείξετε ότι :

α) $(x+1)\cdot\ln(x+1) \ge x$, $x > -1$

β) $\int_0^1 (x+1)^{x+1} dx > e - 1$

22.143 Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{x-1}{x} \le \ln x \le x - 1$, $x > 1$

β) $1 < \int_2^{e+1} \frac{1}{\ln x} dx < e$

22.144 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να δείξετε ότι $\int_1^2 x^x dx > e - 1$

22.145 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$.

α) Να δείξετε ότι f είναι κυρτή .

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

γ) Να δείξετε ότι $\int_0^2 e^{x^2} dx > 2e$.

22.146 Δίνεται η $f(x) = \ln(1-x) + 5x - 2$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

γ) Να δείξετε ότι $e^{-x} \ge 1 - x$, $x < 1$

δ) Να δείξετε ότι $\int_{-1}^0 [\ln(1-x) + 5x] dx \le -2$

22.147 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{2}$

22.148 Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f'(x) + f(x) > 2xe^{-x}$, $x \in [0, 1]$.

Να δείξετε ότι $3\int_0^1 e^x f(x) dx > 1$.

22.149 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη , $f(0)=0$ και να ισχύει $f'(x) + 2xf(x) > 2xe^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx > \frac{e-1}{e}$.

22.150 Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη τέτοια , ώστε $f(0) = 0$, $f(1) = 3$ και $f'(x) > 2$, $\forall x \in [0, 1]$.

Να δείξετε ότι : $1 \le \int_0^1 f(x) dx \le 2$.

22.151 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα , με συνεχή δεύτερη παράγωγο , $f(0)=0$, $f(\pi)=\pi$.

Να δείξετε ότι $0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$

(ΘΕΜΑ 2016)

22.152 Δίνεται η $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και $\varepsilon : y = x - \pi$ εφαπτομένη της .

Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$

(ΘΕΜΑ 2017)

Θ. Συνδυαστικές με Αρχικές

22.153 Έστω F μια παράγουσα στο $\mathbb{R}$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ με $F(1) = 0$.

Να βρείτε το ολοκλήρωμα : $A = \int_0^1 F(x) dx$

22.154 Δίνεται $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2e^{x^2}$ και F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Αν η C_F τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $A(1, f(1))$, να βρείτε το $A = \int_0^1 F(x) dx$

22.155 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν επιπλέον η F είναι μια παράγουσα της f με $F(1) = 0$ και η ευθεία $\varepsilon : y = 2x - 2$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 1 , να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{x^2 - 2x + 1}$

22.156 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ ώστε $F(0) = F(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = F(x)$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα .

22.157 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$ και F μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2\,,4) : f'(\xi)F(\xi) = f(\xi)\left(\sqrt{2} - f(\xi)\right)$

22.158 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Έστω επίσης F μια παράγουσα της f για την οποία ισχύει $F(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι :

α) υπάρχει $x_0 \in (0\,,1) : F(x_0) = 1 - x_0$

β) υπάρχουν τουλάχιστον δύο $\xi_1\,,\xi_2 \in (0\,,1)$ με $\xi_1 < \xi_2$ ώστε $f(\xi_1)\cdot f(\xi_2) = 1$

22.159 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ ώστε $F(0) = 0$ και $2f(x) - e^{x - F(x)} = 0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τον τύπο της f

22.160 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ ώστε $F(1) = 3$ που ικανοποιεί τη σχέση
$f(x) = (2x+1)e^{x^2+x-F(x)}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τον τύπο της f

22.161 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ ώστε $F(0) = 1$ και $F(x)\,f(x) = -e^{-2x}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τον τύπο της f

22.162 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ ώστε $F(0) = 1$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = e^x + F(x)$
Να βρείτε τον τύπο της f

22.163 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ ώστε $F(0) = 1$ που ικανοποιεί τη σχέση
$(F(x) - x)\cdot(f(x) - 1) = x$
Να βρείτε τον τύπο της f

22.164 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ και F μια παράγουσά της στο $(0,+\infty)$ με $F(1) = 0$
Αν ισχύει
$F(x) \le e^{-x^2}\ln x\,, \forall x > 0$, να δείξετε ότι $f(1) = \frac{1}{e}$

22.165 Δίνεται $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0\,, \forall x \in \mathbb{R}$ και f συνεχής.Αν επιπλέον η F είναι μια παράγουσα της f και για τη
$G(x) = F(x) - x^2 + 3$, ισχύει $G(x) \ge G(1)$
να βρείτε τη μονοτονία της F

22.166 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω F η αρχική της f ώστε να ισχύει $F(1)=0$ και $(x-2)F(x) \le e^{x-2} - x + 1\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $\int_1^2 f(t)dt$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1\,,2) : f(\xi) + F(\xi) = 0$.

22.167 Δίνεται παραγωγίσιμη $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1\ ,\ f'(x) = -\frac{2x}{x^2+1}\cdot f(x)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Αν F(x) είναι αρχική της f(x) με $F(1)=0$ να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 F(x)dx$

22.168 Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή $f'(x)$ και έστω F η αρχική της f ώστε να ισχύει $F(1)=0$ και
$x\,F(x) \ge xe^x - e^x - x + 1\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

α)Να αποδείξετε ότι $f(1) = e - 1\ ,\ \int_0^1 f(t)dt = 1$

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x\,f'(x)dx$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + F(x) = e^{-x}$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0\,,1)$.

22.169 Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : (0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ και έστω F η παράγουσα της f. Να αποδείξετε ότι
$3\cdot F(x) < F(2x) + 2F\left(\frac{x}{2}\right), \forall x > 0$

22.170 Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : [1\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ και έστω F η παράγουσα της f. Να αποδείξετε ότι
$(x+1)\cdot F(x) > x\cdot F(1) + F(x^2), \forall x > 1$

22.171 Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω F η παράγουσα της f.
Αν η συνάρτηση F δεν είναι 1-1 ,
τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα .

Primitive function
Αρχική συνάρτηση

Anti-derivative function
Παράγουσα συνάρτηση

23. Εμβαδόν Χωρίου

Στην προσπάθειά μας να υπολογίσουμε το εμβαδόν κάτω από καμπύλες, φθάσαμε στην έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος.
Η βασικότερη εφαρμογή του ορισμένου ολοκληρώματος είναι ο υπολογισμός εμβαδών χωρίων που σχηματίζουν οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

Α. Εμβαδό μεταξύ C_f και άξονα x'x

23.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+3$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$ **(Σχολικό)**

23.2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+2x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

23.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x-2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=-2$ και $x=3$.

23.4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x-x^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$

23.5 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$

23.6 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+8$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$.

23.7 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^2+2x+3$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=-2$ και $x=4$.

23.8 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-e^{-x}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$

23.9 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=0$ και $x=\ln 2$

23.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2e^x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$.

23.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}\cdot(x+1)$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=-2$ και $x=0$

23.12 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις $x=e^{-1}$, $x=e$

23.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x+3}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$.

23.14 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x}$, $x>0$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

23.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{x}$, $x>0$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

23.16 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x’x .

23.17 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x’x
(Σχολικό)

23.18 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-x^2$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x’x .

23.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+2$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x’x .

23.20 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-x$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x’x .

23.21 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x^2-2x$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x’x

23.22 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-3)\ln x$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x’x .

23.23 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2-4)\ln x$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x’x .

23.24 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+3}$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x’x

23.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x+1}$
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x’x .

23.26 Δίνεται η $f(x)=\dfrac{x^3-8x^2+19x-12}{x-2}$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x’x .

23.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-1$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x’x και την ευθεία $x=1$.

23.28 Δίνεται η $f(x)=x\sqrt{x+1}$, $x>-1$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x’x και την ευθεία $x=3$

23.29 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x’x και την ευθεία $x=2$.

23.30 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln^2 x$, $x>0$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x’x και την ευθεία $x=e$.

23.31 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-25}$
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x’x και την ευθεία $x=3$.

23.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+4x}{x+1}$
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον x’x και την $x=-2$.

23.33 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-3)e^x$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τους άξονες x’x και y’y

23.34 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x+1}$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και ακρότατα
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x’x και τις ευθείες $x=2$ και $x=5$.

23.35 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$
α) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και ακρότατα
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x’x και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

23.36 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} x\cdot e^x, & x\le 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1}, & x>0 \end{cases}$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x’x και τις ευθείες $x=-1$, $x=1$

23.37 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}3x^2\,, & x\le 0\\ e^{-x}-1\,, & x>0\end{cases}$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=-2$, $x=1$.

23.38 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+3\,, & x<2\\ -x+5\,, & x\ge 2\end{cases}$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=-1$, $x=5$.

23.39 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}-x^2+3\,, & x<1\\ 2\sqrt{x}\,, & x\ge 1\end{cases}$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=-1$, $x=2$ **(Σχολικό)**

23.40 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x-3\,, & x<2\\ -2x+5\,, & x\ge 2\end{cases}$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x **(Σχολικό)**

23.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x^2-x-2|$
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=-2$, $x=3$

23.42 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-x-1$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και την ευθεία $x=1$.

23.43 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και την ευθεία $x=2$.

23.44 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Να βρείτε:
α) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις $x=1$ και $x=2$
β) την ευθεία $x=\alpha$ η οποία διαιρεί το χωρίο αυτό σε δύο ισοεμβαδικά χωρία

23.45 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^2+4x-3$.
Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x'x, να βρείτε την τιμή του $\alpha\in(1,3)$ έτσι, ώστε η ευθεία $x=\alpha$ να χωρίζει το Ε σε δύο ισοεμβαδικά χωρία

23.46 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-x^2$.
Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x'x, να βρείτε την τιμή του $\alpha\in(-1,1)$ έτσι, ώστε η ευθεία $x=\alpha$ να χωρίζει το Ε σε δύο ισοεμβαδικά χωρία

23.47 Δίνεται η $f(x)=\frac{x^2+4}{x^2}$ Να βρείτε:
α) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις $x=2$ και $x=4$
β) την ευθεία $x=\alpha$, με $2<\alpha<4$ η οποία διαιρεί το χωρίο αυτό σε δύο ισοεμβαδικά χωρία

23.48 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}\alpha+\ln x\,, & 0<x\le 1\\ 1+\sqrt{x-1}\,, & x>1\end{cases}$
Να βρείτε :
α) την τιμή του α αν η f είναι συνεχής
β) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις $x=\frac{1}{2}$, $x=2$

23.49 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$
α) Να υπολογιστεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=e$ και $x=\lambda$ με $\lambda>e$
β) Να βρείτε τα $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$ και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{E(\lambda)}{\lambda}$

23.50 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$
α) Να υπολογιστεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$ με $\lambda>0$
β) Να βρείτε την ευθεία $x=\alpha$ η οποία χωρίζει το $E(\lambda)$ σε δύο ισοεμβαδικά χωρία
γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{E(\lambda)}{\lambda}$

23.51 Να βρεθεί το ελάχιστο εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)=x^2-5x+7$ τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\alpha+3$

23.52 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x t\cdot e^{x-t}dt$
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες x'x, y'y και την ευθεία $x=1$.

23.53 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$ και έστω F αρχική της f στο $\mathbb{R}$ με $F(1) = 0$
α) Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_F, τους άξονες x'x, y'y και την ευθεία $x = 1$

23.54 Δίνονται οι παραγωγίσιμες $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $F(x) = x + e^{g(x)}$, όπου F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 1$, $x = 3$ είναι ίσο με 2 τ.μ., να δείξετε ότι $\xi \in (1,3) :\ g'(\xi) = 0$

23.55 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$, $x > 0$.
Αν $E(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 2$, $x = 3$, να αποδείξετε ότι:
$$\frac{e^2}{4} < E(\Omega) < \frac{e^3}{9}$$

23.56 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 5$, $xf'(x) = 2(1 - f(x))$, $x > 0$
α) Να δείξετε ότι $f(x) = 1 + \dfrac{4}{x^2}$, $x > 0$
β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$ με $0 < \lambda \neq 1$
γ) Αν $\lambda > 1$ και το λ αυξάνεται με ρυθμό 3 μον/s, τότε να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\lambda)$ τη στιγμή που είναι $\lambda = 2$

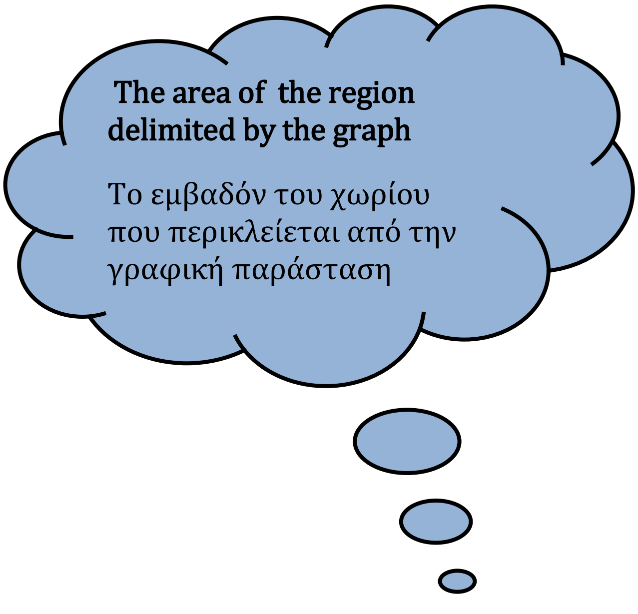
23.57 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \le 3 \\ \dfrac{1 - e^{x-3}}{x - 3}, & x > 3 \end{cases}$.
Να βρείτε:
α) την τιμή του α αν η f είναι συνεχής
β) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(4, f(4))$
γ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$ **(ΘΕΜΑ 2001)**

23.58 Αν ισχύει ότι $\dfrac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$, $\forall\, x > 0$ και αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$ να δείξετε ότι
$\dfrac{1}{4} < E < \dfrac{1}{2} f(1)$ **(ΘΕΜΑ 2002)**

23.59 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)\ln x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και την ευθεία $x = e$. **(ΘΕΜΑ 2012)**

23.60 Δίνεται η $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $\varphi(x) = e^x(h(x) + \ln 2)$, τον άξονα x'x και την ευθεία $x = 1$ **(ΘΕΜΑ 2014)**

23.61 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + 1$, γνησίως αύξουσα για $x < 1$.
Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = x_0$ με $x_0 < 1$ να δείξετε ότι
$E = \dfrac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}$ **(ΘΕΜΑ 2016 Ε)**



Β. Εμβαδό μεταξύ C_f, C_g

23.62 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4x - 5$ και $g(x) = x + 1$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = -2$ και $x = 2$.

23.63 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = -x^2 + 2x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 4$

23.64 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x - 1$ και $g(x) = 2x + 1$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$

23.65 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - 2x - 2$ και $g(x) = x^2 - e^x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$

23.66 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$

23.67 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1-x}{x}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και την ευθεία $x = 2$

23.68 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 4x$ και $g(x) = x + 4$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g

23.69 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = 4x - x^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τις C_f, C_g.

23.70 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + x$ και $g(x) = -x^2 + 3x + 4$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g.

23.71 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = 2x - x^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τις C_f, C_g. **(Σχολικό)**

23.72 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = 7x - 6$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τις C_f, C_g.

23.73 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ και $g(x) = 2x^2 + 4x - 3$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g.

23.74 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x^3 - 2x$ και $g(x) = 2x - x^3$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g

23.75 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + 2x$ και $g(x) = 3x^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g.

23.76 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 1$ και $g(x) = \alpha x + 1$. Να βρείτε την τιμή του $\alpha > 0$ για την οποία το εμβαδόν που περικλείεται από τις C_f, C_g να είναι 36 τ.μ.

23.77 α) Να δείξετε ότι $e^{3x} \geq x + 1$, $\forall x \geq 0$.
β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-2x}(x + 1)$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g, τον άξονα y'y και την ευθεία $x = 1$

23.78 α) Αν ισχύει ότι $\ln x \geq \frac{\alpha\cdot(x-1)}{x}$, $\forall x > 0$, να δείξετε ότι $\alpha = 1$
β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ και $g(x) = x^2 - x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$

23.79 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4 - x^2$ και την ευθεία $x - y - 2 = 0$ **(Σχολικό)**

23.80 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ και την ευθεία $x - 2y = 0$

23.81 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{x+1}{3}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g **(Σχολικό)**

23.82 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(1 + x)$ και $g(x) = x - \frac{x^2}{2}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και $x = 1$

23.83 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - 1$ και $g(x) = \ln(1 + x)$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$

23.84 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη της στο σημείο με τετμημένη $x = 3$ και τον άξονα y'y .

23.85 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 - 2x + 3$
α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο $A(2 , -5)$
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη της στο σημείο A και τον άξονα y'y

23.86 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - x + 1}$
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$

23.87 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$

23.88 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και την ευθεία $x = 2$.

23.89 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-1} - x + 1$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$, την ευθεία $x = 1$ και τον άξονα y'y.

23.90 Δίνεται η $f(x) = 3x + \frac{1}{2x^2}$. Να βρείτε :
α) τις ασύμπτωτες της C_f
β) το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και των ευθειών $x = 1$, $x = \alpha$, $\alpha > 1$
γ) το όριο $\lim_{\alpha\to+\infty} E(\alpha)$

23.91 α) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-1)^2}$ της πλάγιας ασύμπτωτής της στο $+\infty$ και των ευθειών $x = 3$, $x = \lambda$ με $\lambda > 3$.
β) Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$

23.92 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - x + 2| \le \frac{2|x|}{x^2 + 1}$
α)Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$
β) Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, να δείξετε ότι $E \le \ln 2$

23.93 Δίνονται οι συναρτήσεις f , g δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις :
$f''(x) = g''(x) + e^x$, $f'(0) = g'(0) + 1$ και $f(0) = g(0)$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και την $x = 1$

23.94 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{e^x}{e^x + 1}$
α)Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της και τις ευθείες $x = 1$, $x = \lambda$, με $\lambda > 1$
γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{E(\lambda)}{\lambda}$

23.95 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x = 0$
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη και των ευθειών $x = -1$ και $x = 1$

23.96 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$
α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x = 1$
β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
γ) Να δείξετε ότι $2x - 1 \ge \frac{\ln x}{x} + x$, $\forall x \in [1 , e]$
δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη και την ευθεία $x = e$.

23.97 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x^4$
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x = 1$
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την εφαπτομένη και των ευθειών $x = 1$ και $x = 2$

23.98 Έστω F, G οι αρχικές των f, g αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει $F(x) - G(x) = x^2 - 4x + 4$ και $F(2) = G(2) = 0$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και $x = 0$

23.99 Το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + 1$ και την ευθεία $y = 5$ χωρίζεται από την ευθεία $y = \alpha^2 + 1$, $\alpha > 0$ σε δύο ισοεμβαδικά χωρία. Να βρείτε το α. **(Σχολικό)**

23.100 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(2x - 1)$, $g(x) = e^{2x-2} - 1$
α) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των C_f, C_g στο κοινό τους σημείο $A(1, 0)$
β) Να μελετήσετε τις f, g ως προς την κυρτότητα
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και $x = 2$

23.101 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e \cdot x$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M.
γ) Να δείξετε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται από την C_f, της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα y'y, είναι $E(\lambda) = \dfrac{e-2}{2\lambda}$
δ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$
(ΘΕΜΑ 2005)

23.102 Δίνεται η $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$, $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ μια σταθερά. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ **(ΘΕΜΑ 2007)**

23.103 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \cdot \eta\mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g με $g(x) = e^{5x}$ τον άξονα y'y και την ευθεία $x = \pi$
(ΘΕΜΑ 2017)

23.104 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την ευθεία $y = -x + 2$ και των ευθειών $x = 1$ και $x = 2$ **(ΘΕΜΑ 2019)**

Γ. Εμβαδό μεταξύ C_f, C_g, C_h

23.105 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x, την εφαπτομένη ευθεία ε της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και την ευθεία $x = -1$.

23.106 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x, την εφαπτομένη ευθεία ε της C_f στο σημείο της $A(1, e)$ και την ευθεία $x = -1$.

23.107 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = -x^2 - x + 2$.
α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x = -1$
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και την εφαπτομένη.

23.108 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 3x^2$.
α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x = 1$
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και την εφαπτομένη **(Σχολικό)**

23.109 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$.
α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x = 1$
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και την εφαπτομένη

23.110 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 5$
α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta : x - 2y + 2020 = 0$.
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x, την εφαπτομένη και τον άξονα y'y.

23.111 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x$ και (ε) η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το $O(0\,,0)$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x, την (ε) και την ευθεία $x = -1$.

23.112 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$.
Να βρείτε:
α) τις εξισώσεις των εφαπτόμενων στα σημεία που η C_f τέμνει τον άξονα x'x
β) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις δύο εφαπτόμενες

23.113 α) Να βρείτε το εμβαδό $E(\lambda)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $g(x) = \ln x$, τον άξονα x'x και την ευθεία $x = \lambda\,, \lambda > e$
β) Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$ **(Σχολικό)**

23.114 Δίνεται η παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x-2) = 4x - 8$, $f(1) = 2$
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x^2$
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x = 1$
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και την εφαπτομένη.

23.115 Δίνεται η $f(x) = x^2 + x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Αν η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο τομής της με την ευθεία $x = 2$ τέμνει τον άξονα y'y στο $y_0 = -3$, τότε να βρείτε:
α) το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε)
β) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα x'x και της ευθείας $x = \frac{3}{5}$ **(ΘΕΜΑ 2006 Ε)**

23.116 Δίνεται η $f(x) = -\eta\mu x\,, x \in [0\,,\pi]$ και δύο εφαπτόμενες που άγονται από το $A\left(\frac{\pi}{2}\,,-\frac{\pi}{2}\right)$ έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1: y = x$ και $\varepsilon_2: y = x - \pi$.
Αφού σχεδιάσετε την C_f και τις εφαπτόμενες, να αποδείξετε ότι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$, όπου E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $\varepsilon_1\,, \varepsilon_2$ και E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και του άξονα x'x **(ΘΕΜΑ 2017)**

Δ. Εμβαδό και Αντίστροφη Συνάρτηση

23.117 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 1\,, x = 3$.

23.118 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x - 3$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, την ευθεία $x = -6$ και τους άξονες x'x και y'y

23.119 Δίνεται η $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f\,, C_{f^{-1}}$

23.120 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \frac{3}{4}x$
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f\,, C_{f^{-1}}$

23.121 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2007} + x - 1$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f\,, C_{f^{-1}}$ και τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$

23.122 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την διχοτόμος της πρώτης γωνίας των αξόνων
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f\,, C_{f^{-1}}$

23.123 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 0\,, x = e$.

23.124 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \ln x$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 0$, $x = e$

23.125 Να δειχθεί ότι η $f(x) = \ln(x+1) + x$ αντιστρέφεται και να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από $C_{f^{-1}}$, τον άξονα x'x και την ευθεία $x = e$

23.126 Δίνεται η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη ώστε $f^3(x) + f(x) = 2x \ , \ x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται .
β) Να βρείτε την αντίστροφη .
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ευθεία $x = 1$ και τους άξονες x'x και y'y .

23.127 Δίνεται η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη ώστε $f^3(x) + f(x) = x + 2 \ , \ x \in \mathbb{R}$
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται .
β) Να βρείτε την αντίστροφη .
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τους άξονες x'x και y'y .

23.128 Δίνεται η $f(x) = x^2 + 2x \ , \ x \geq -1$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f , f^{-1}
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1}

23.129 Δίνεται η $f(x) = x^2 - 2x + 2 \ , \ x \geq 1$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f , f^{-1}
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , $C_{f^{-1}}$

23.130 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο [0 , 1] για την οποία ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = 3x \ , \ x\epsilon[0,1]$.
α) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$, $f(1) = 1$
β) Να βρείτε την αντίστροφη ,αν ορίζεται
γ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 f^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx$
δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις f, f^{-1} και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$

23.131 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται .
β) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1} του άξονα x'x και της ευθείας $x = e$.
γ) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη να βρείτε την εφαπτομένη της f^{-1} στο $x_0=0$

23.132 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= 2e^x - x^2 + 1$
α) Να βρείτε την μονοτονία της f
β) Να δείξετε ότι $f([0,1]) = [3, 2e]$
γ) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
δ) Αν η f^{-1} είναι συνεχής , να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 3$, $x = 2e$.

23.133 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει
$f(x) = \left(\int_0^3 f(t)dt + 20\right) e^{x-3} - x^2 - 2x \ , \ x\epsilon \mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2e^x - x^2 - 2x$
β) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης
δ) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της αντίστροφης, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = \frac{2}{e^2}$, $x = 2$.

23.134 Δίνεται η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής , για την οποία ισχύει $f(x) = x - 1 - F(x), \ x \in \mathbb{R}$, όπου F αρχική της f στο $\mathbb{R}$ με $F(0) = 0$
α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη
β) Να βρείτε τον τύπο της f
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , $C_{f^{-1}}$ και τις ευθείες $x = -1$, $x = 0$

23.135 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείετα από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα x'x και την ευθεία $x = 3$.
(ΘΕΜΑ 2003)

23.136 Δίνεται παραγωγίσιμη $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$e^{f(x)}(f^2(x)-2f(x)+3)=x$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της .

β) Να μελετήσετε την αντίστροφη ως προς την κυρτότητα .

Στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της αντίστροφης , την εφαπτομένη της αντίστροφης στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα y'y και την ευθεία $x=1$

(ΘΕΜΑ 2014 Ε)