ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=\ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$.

β) Αν $f(x)=\ln|x|$ για κάθε $x\neq 0$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x\neq 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_o, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu\geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

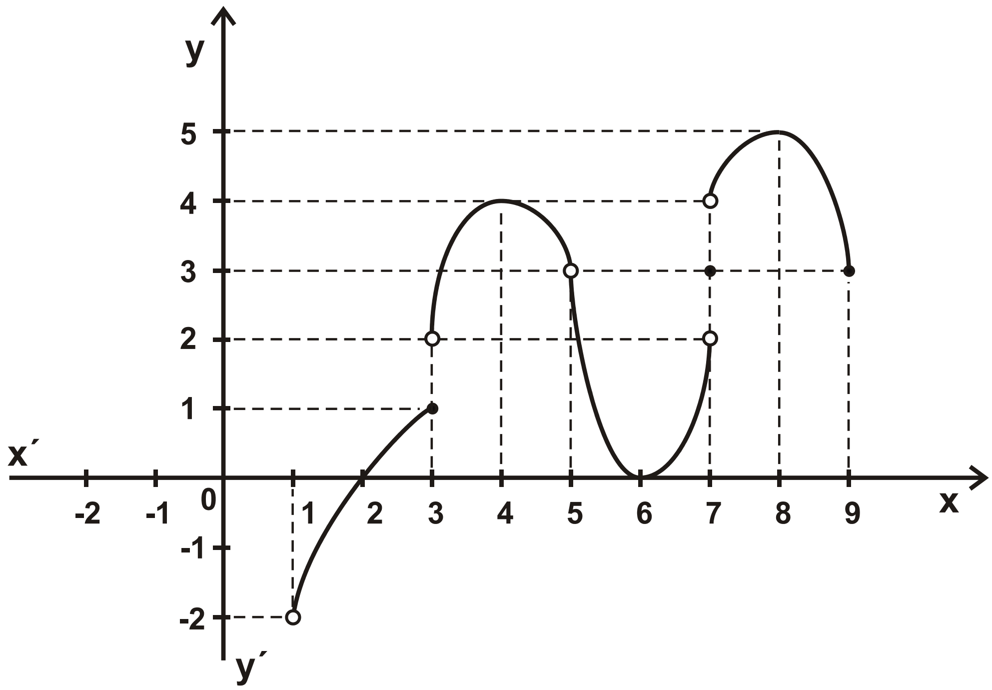
ε) Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

αν $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx>0$, τότε $f(x)>0$ στο $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 2

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim_{x\to 3} f(x)$

γ) $\lim_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim_{x\to 7} f(x)$ **ε)** $\lim_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim_{x\to 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_o του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_o)=0$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(\eta\mu x)>f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right).$$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3,\ x\geq 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

Μονάδες 4

Γ4. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx\ .$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}+1 & ,0<x<1\\ 1 & ,x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1} & ,x>1\end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ (μονάδες 3) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Μονάδες 8

Δ3. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

(μονάδες 3)

ii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=x_o$, όπου x_o η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E=\frac{-{x_o}^2-2x_o+2}{2}.$$

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1,+\infty)$ να αποδείξετε ότι

$$(x+1)F(x)>xF(1)+F(x^2),\quad \text{για κάθε } x>1.$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ